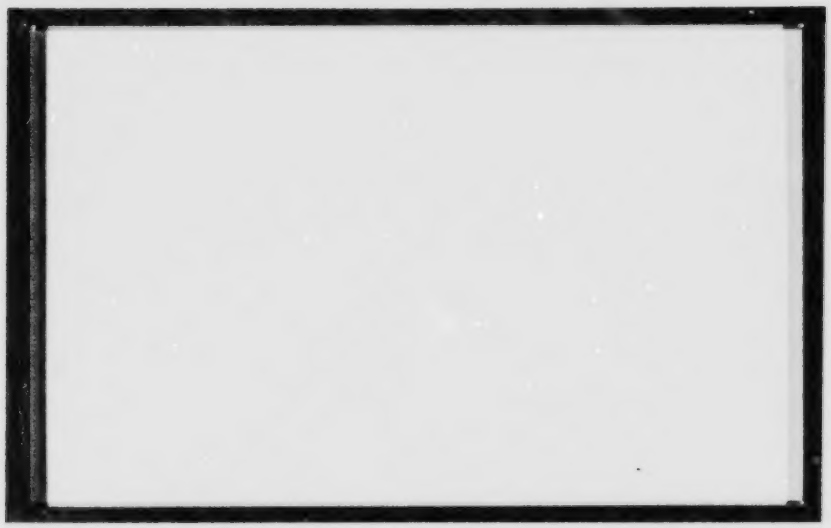
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL



CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

MÉMOIRE D'ÉTUDIANT

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

MODÈLES DE COMPORTEMENT DES PASSAGERS EN TRANSPORT AÉRIEN

par

Sylvie Lavoie

Mémoire de M.Sc., département d'informatique et de recherche opérationnelle, dirigé par Jacques Ferland et François Soumis

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #408
Juin 1984

Dépôt légal - 2e trimestre 1985

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES v

LISTE DES TABLEAUX vii

SOMMAIRE viii

CHAPITRE PREMIER : INTRODUCTION

1.1 Intérêt d'un modèle d'assignation des passagers dans la mise en place d'une offre de transport 1

1.2 Utilisation du modèle dans un processus HOMME-MACHINE pour évaluer la meilleure offre de transport 3

1.3 Deux modèles à évaluer 6

CHAPITRE DEUXIEME: PROBLEME ET APPROCHE UTILISEE 9

2.1 Définition du problème 10

2.2 Différentes méthodes de traitement du problème 11

2.3 Approche utilisée 13

2.4 Réseau utilisé 16

CHAPITRE TROISIEME: ATTRACTION D'UNE ROUTE POUR UN PASSAGER 23

3.1 Revue de littérature sur les modèles d'attraction 25

3.2 Mesure d'insatisfaction utilisée dans le modèle M1 42

3.3 Nouveau modèle d'attraction utilisé dans le modèle M2 44

3.4 Construction des marchés 46

CHAPITRE QUATRIEME: LIMITE DE CAPACITE DES AVIONS 49

4.1 Notion de passagers excédentaires: une nouvelle approche 51

4.2 Calcul du nombre de passagers excédentaires dans le contexte du modèle M1 53

4.2.1 Contexte du modèle 54

4.2.2 Calcul du nombre de passagers excédentaires sur un arc 57

4.2.3 Calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route 61

4.2.4 Approximation du nombre de passagers excédentaires sur un arc 63

4.3 Calcul du nombre de passagers excédentaires dans le contexte du modèle M2 67

4.3.1 Contexte du modèle 67

4.3.2 Calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route 70

4.3.3 Approximation du nombre de passagers excédentaires sur un arc 74

4.3.4 Prolongement de la fonction calculant le nombre de passagers excédentaires sur une route pour une assignation des passagers sur les routes, à l'extérieur du domaine de la fonction 80

CHAPITRE CINQUIEME: MODELE M1: PROBLEME DE PROGRAMMATION NON-LINEAIRE 83

5.1 Notations 84

5.2 Espérance du revenu perdu en refusant les passagers, faute de place 85

5.3 Coût associé à l'utilisation de routes non-attrayantes 86

5.4 Equations du modèle 88

5.5 Méthode de résolution pour le problème global 90

CHAPITRE SIXIEME: MODELE M2: SYSTEME D'EQUATIONS NON-LINEAIRE 95

6.1 Notations 96

6.2 Comportement des passagers dans le processus du choix de routes, traduit sous forme d'équations 97

6.3 Equations du modèle 103

6.4 Méthode de résolution pour le problème global 106

CHAPITRE SEPTIEME: RESOLUTION DU SOUS-PROBLEME ASSOCIE A UN MARCHE 109

7.1 Approche globale 110

7.2 Calcul de la direction de descente 111

7.3 Calcul du pas optimal 118

7.4 Convergence de l'algorithme 120

CHAPITRE HUITIEME: RESULTATS ET CONCLUSION 127

8.1 Calibration du modèle M1 128

8.2 Résultats du modèle M1 132

8.3 Calibration du modèle M2 138

8.4 Résultats du modèle M2 142

8.5 Conclusion 149

ANNEXE 1: Preuve des lemmes 1, 2 et 3 utilisés à la section 7.4 153

BIBLIOGRAPHIE 158

LISTE DES FIGURES

1 Utilisation d'un modèle d'assignation des passagers par un planificateur pour établir la meilleure offre de transport

2 Réseau utilisé par les passagers d'une origine-destination

3 Fonction $Q_k(T)$

4 Histogramme du temps de départ préféré pour les passagers d'une origine-destination (i,j)

5 Analyse de sensibilité des voyageurs à l'horaire et au niveau de service

6 Rôle du paramètre α

7 Partage en marchés des passagers d'une origine-destination

8 Passagers excédentaires en fonction du nombre de passagers qui tentent d'utiliser un avion pour les différentes approches

9 Situation observée au niveau des routes pour le modèle M1, en considérant les passagers à leur dernier essai

10 Passagers excédentaires sur un arc en fonction de f_a (C_a = 100 et λ_a = 0.2)

11 Passagers excédentaires sur un arc en fonction de f_a (C_a = 100 et λ_a = 0.3)

12 Situation observée au niveau des routes pour le modèle M2, en comptant tous les essais des passagers

13 Passagers excédentaires sur un arc en fonction de k_a (C_a = 100 et λ_a = 0.2)

14 Passagers excédentaires sur un arc en fonction de k_a (C_a = 100 et λ_a = 0.3)

15 Cheminement des passagers

16 Cheminement des passagers suivant l'hypothèse oubliante

17 Graphique de f(u)

18 Distribution de la différence entre le nombre de passagers calculés par le modèle M1 et le nombre de passagers observés, au niveau des arcs

19 Nombre de passagers sur un arc calculé par le modèle M1 en fonction du nombre de passagers observés

20 Distribution de la différence entre le nombre de passagers calculés par le modèle M2 et le nombre de passagers observés, au niveau des arcs

21 Nombre de passagers sur un arc calculé par le modèle M2 en fonction du nombre de passagers observés

LISTE DES TABLEAUX

1 Effet du paramètre k

2 Effet des paramètres β_1, β_2, β_3

3 Distribution des erreurs relatives au flot des arcs pour les sous-ensembles d'arcs obtenus en divisant suivant les critères d'occupation et longueur des arcs

4 Distribution des erreurs relatives au flot des arcs pour les sous-ensembles d'arcs obtenus en divisant suivant le type d'avion

5 Effet du paramètre M

6 Effet des paramètres β_1, β_2 et β_3

7 Effet du paramètre alpha

8 Distribution des erreurs relatives au flot des arcs pour les sous-ensembles d'arcs obtenus en divisant suivant les critères d'occupation et longueur des arcs

9 Distribution des erreurs relatives au flot des arcs pour les sous-ensembles d'arcs obtenus en divisant suivant le type d'avion

10 Résultats obtenus du modèle M2 en arrêtant l'algorithme à différents moments

SOMMAIRE

En transport aérien, la mise en place d'une offre de transport représente un problème fort complexe. Un transporteur doit évaluer l'horaire et la flotte d'avions de façon à satisfaire la demande et à être compétitif avec les autres modes de transport. Un modèle capable de prédire la distribution de la demande sur un réseau serait donc bien utile pour un transporteur aérien. En fonction du remplissage des avions obtenu d'un tel modèle, le planificateur peut évaluer les revenus associés à son plan de vol, faire des changements, s'il le désire, et utiliser le modèle à nouveau pour évaluer l'effet des modifications.

Dans ce travail, nous étudions deux modèles d'assignation des passagers pouvant être utilisés dans un tel processus de planification. Le premier modèle, un modèle de programmation non-linéaire relativement simple, réalise l'optimisation coopérative en distribuant les passagers sur les routes de façon à minimiser un objectif global de satisfaction de l'ensemble des passagers. Contrairement à cela, le deuxième modèle qui consiste en un système d'équations non-linéaires réalise l'optimisation égoïste en s'appuyant sur l'hypothèse que chaque client choisit sa route en fonction de ses préférences sans coopérer pour respecter les préférences des autres. Ce dernier modèle est défini à partir d'hypothèses de comportement, il est donc plus près de la réalité et supérieur du point de vue théorique.

Dans la première partie du travail, nous décrivons les notions théoriques sous-jacentes aux modèles. Par la suite, nous formulons et présentons l'algorithme de résolution et les preuves de convergence. La méthode de résolution utilisée pour résoudre les modèles est une méthode de décomposition. Les sous-problèmes sont résolus par un algorithme de direction réalisable.

Nous terminons en analysant les résultats expérimentaux. Les modèles sont évalués à partir de plusieurs critères comme l'erreur obtenue en comparant les flots calculés et les flots observés, le temps de calcul, la sensibilité du modèle aux variations des paramètres...Notons que les modèles ont été expérimentés à partir de données fournies par la compagnie aérienne Air Canada.

Les résultats obtenus sont très encourageants, tant au point de vue de la qualité des solutions produites qu'au point de vue des temps de calcul.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

1.1 Intérêt d'un modèle d'assignation des passagers dans la mise en place d'une offre de transport

La mise en place d'une offre de transport représente un problème fort complexe pour un transporteur aérien. Il doit planifier la composition de sa flotte d'avions (nombre et types d'avions) et son utilisation (horaire des vols, cheminement des avions sur le réseau) de façon à satisfaire et même à promouvoir la demande de voyage.

Bien que les composantes de ce problème puissent apparaître à des niveaux différents du processus de planification, elles ne s'avèrent pas indépendantes les unes par rapport aux autres et donnent ainsi au problème un caractère très complexe. Par exemple, lorsqu'un transporteur aérien choisit les types d'avion à acheter, il doit considérer le détail de leur utilisation sur le réseau. Il ne peut faire son choix en considérant seulement le prix de revient par kilomètre/passager. Un type d'avion supérieur de ce point de vue n'est pas nécessairement le plus rentable pour un réseau donné. En effet, les appareils ayant un faible coût d'opération par siège sont de gros appareils qui fonctionneraient à perte dans plusieurs marchés, faute de remplissage.

Les intérêts différents du transporteur et de la clientèle est un autre facteur qui rend ce problème de planficication difficile. Un transporteur aérien tente d'offrir des services répondant le plus possi-

ble aux besoins de la clientèle, tout en réduisant les coûts. Or, ces deux objectifs considérés indépendamment conduisent souvent à des solutions différentes. Par exemple, un transporteur peut enlever l'avion sur un arc congestionné du réseau et le remplacer par un autre de capacité plus grande dans le but d'augmenter la satisfaction de la clientèle. Par contre, ce changement peut produire une augmentation considérable des coûts d'opération l'obligeant à chercher une solution différente. Une solution alternative pourrait être de modifier l'horaire d'un certain nombre de vols de façon à produire une nouvelle distribution des passagers sur le réseau, entraînant un décongestionnement de l'arc en question.

Avec la crise énergitique et la situation économique actuelle, il devient de plus en plus important pour un transporteur aérien de pouvoir évaluer l'offre de transport donnant le meilleur service au plus bas coût possible. D'un côté, les coûts d'opération augmentent rapidement; de l'autre, la clientèle s'accroît beaucoup plus lentement, ce qui réduit dangereusement la possibilité de bénéfices. Le transporteur doit alors évaluer et restructurer régulièrement le service offert pour conserver la plus grande part du marché et assurer sa rentabilité.

Dans ce contexte, il devient indispensable d'étudier de façon plus précise le comportement des passagers face à une offre de transport. Pour modifier le service offert, un transporteur doit estimer la rentabilité des nouveaux services et celle-ci dépend évidemment de la distribu-

tion de la demande sur le nouveau réseau. Malheureusement, la complexité du problème ne permet pas au planificateur de prédire facilement la circulation des passagers. Un modèle capable de prédire la répartition de la demande entre des vols pour un ensemble de vols offerts serait donc bien utile au planficateur. En fonction du remplissage des avions obtenu avec un tel modèle, le planificateur peut évaluer les revenus associés à son plan de vol, faire des changements s'il le désire et utiliser le modèle à nouveau pour évaluer l'effet des modifications. Le diagramme de la section suivante décrit de façon plus détaillée cette boucle dans laquelle nous pouvons utiliser un modèle d'assignation des passagers pour évaluer la meilleure offre de transport.

1.2 Utilisation du modèle dans un processus homme-machine pour évaluer la meilleure offre de transport

Lors du choix de la flotte d'avion et des vols à offrir, prédire la circulation des passagers sur le réseau se révèle le problème central. A cet effet, la figure 1 montre comment un modèle évaluant la répartition de la demande entre les vols offerts peut être utilisé par un planificateur pour déterminer la meilleure offre de transport.

Le bloc "BASE DE DONNEES" divisé en deux parties représente les données utilisées par le modèle. Du côté "DEMANDE" se trouve les données demeurant fixes d'un tour de boucle à l'autre. La partie "OFFRE" regroupe les variables de décision fixées par le planificateur en fonction de la flot-

te d'avions et du plan de vols à évaluer.

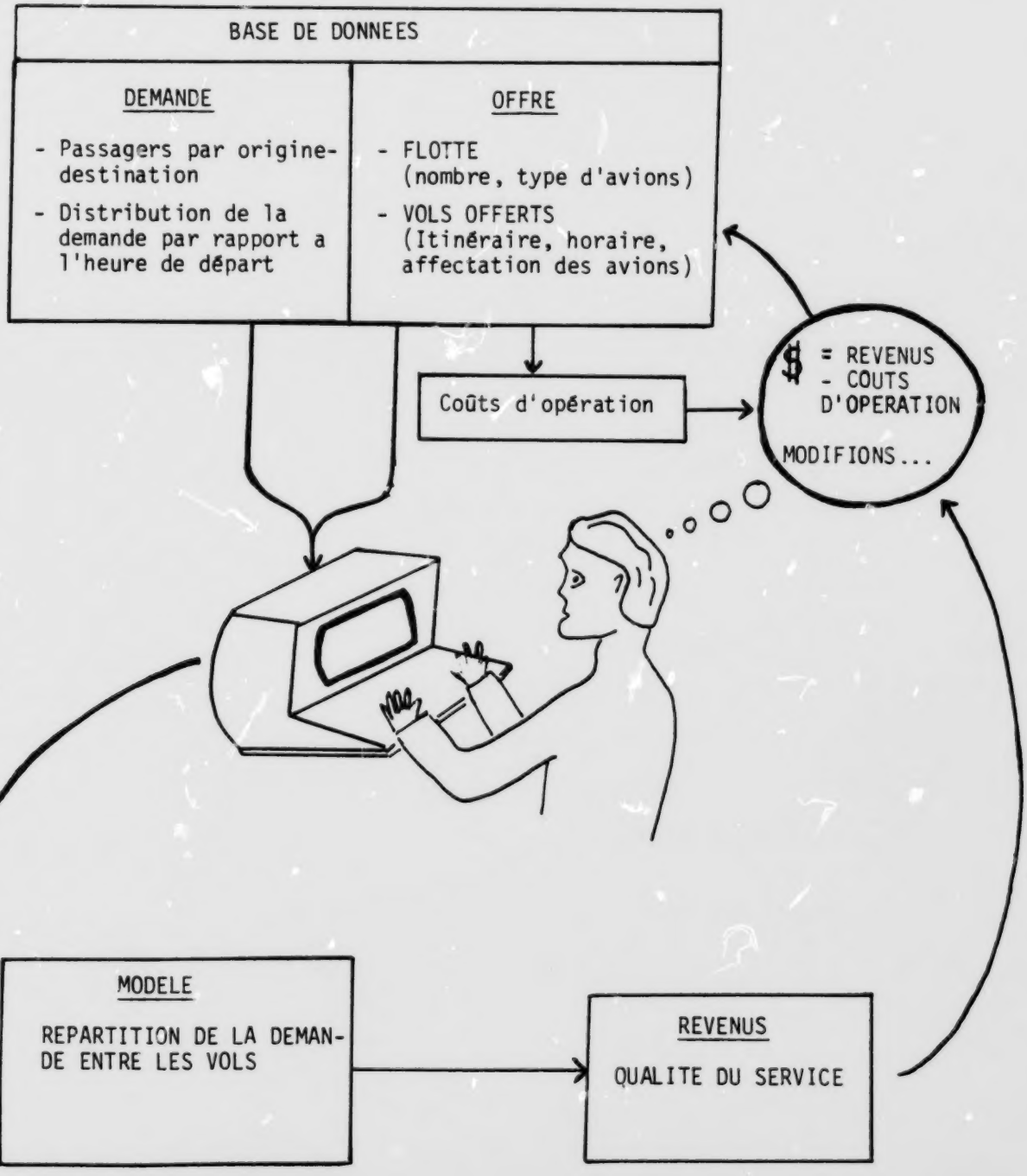
Pour déterminer la rentabilité d'une offre de transport, il faut évaluer les revenus et les coûts impliqués. Les coûts d'opération sont calculés une fois que l'utilisation des avions a été fixée par le planificateur. Par contre, pour évaluer les revenus, il faut estimer le cheminement des passagers transportés. Le rectangle du bas représente un programme informatique qui évalue la répartition de la demande entre les vols proposés à partir d'un modèle d'assignation des passagers.

A la vue des résultats revenus et coûts, le planificateur peut modifier l'offre, soumettre les nouvelles données au programme et mesurer l'effet de ses modifications. Ainsi, en modifiant de façon séquentielle les variables de décision, le planificateur peut mesurer la sensibilité des passagers à différents changements et évaluer la meilleure offre de transport.

Ce type d'approche est en développement présentement au C.R.T. (Centre de recherche sur les transports de l'Université de Montréal). L'objectif visé est de créer un logiciel qui permettrait au planificateur de réaliser cette boucle en effectuant quelques entrées seulement au terminal. Notre travail s'insère donc dans ce cadre.

FIGURE 1

UTILISATION D'UN MODELE D'ASSIGNATION DES PASSAGERS PAR UN PLANIFICATEUR POUR ETABLIR LA MEILLEURE OFFRE DE TRANSPORT



1.3 Deux modèles à évaluer

Maintenant que nous avons vu l'intérêt et l'utilisation d'un modèle d'assignation des passagers dans le processus de planification d'une offre de transport, nous sommes prêts à en faire l'étude. Le but de ce travail est de présenter et d'évaluer deux modèles d'assignation des passagers qui sont des versions améliorées de modèles développés par F. Soumis [7].

Le premier modèle, noté M1 dans ce travail, correspond au modèle déjà implanté MAPUM (modèle pour l'assignation des passagers développé à l'Université de Montréal). Nous avons fait quelques changements dans le programme déjà existant et calibré les paramètres de façon plus précise. Le second modèle, noté M2, n'avait jamais été expérimenté. Il a donc fallu travailler davantage sur la formulation et l'implantation du modèle pour obtenir une version finale satisfaisante.

Nos principales contributions à la formulation des modèles sont les suivantes. Dans un premier temps, nous avons étudié les contextes différents des deux modèles afin de préciser la définition des variables et de spécifier la notion de passagers excédentaires dans chacun des modèles. Cela nous a permis d'établir plus clairement les distinctions et les analogies entre les deux modèles.

Dans un deuxième temps, nous avons accordé une attention spéciale à la notion d'attraction en revoyant tous les développements réalisés du côté

de la modélisation de l'attraction d'une route pour un passager. Nous avons ensuite développé un nouveau modèle d'attraction pour réaliser une répartition pluraliste des passagers dans le modèle M2. Cette dernière s'effectue à partir de l'hypothèse suivante: les passagers n'ont pas tous le même ordre de préférence dans l'utilisation de routes. Les passagers tentent d'utiliser les routes en proportion des coefficients d'attraction que nous avons définis. A l'opposé de cette démarche, dans l'approche traditionnelle, tous les passagers essaient d'utiliser la route la plus attrayante.

De plus, nous avons travaillé sur le développement d'une approximation pour le calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route. La notion de passagers excédentaires dans les modèles M1 et M2 vient modéliser la limite de capacité des avions pour supprimer la contrainte explicite qui rend les modèles classiques difficile à résoudre.

Dans la première partie de cet exposé, nous décrivons d'abord les notions théoriques sous-jascentes aux modèles. Certaines de ces notions ont déjà été introduites dans [7], mais elles sont reprises pour assurer une meilleure compréhension. Par la suite, nous formulons les deux modèles et analysons les résultats expérimentaux obtenus. Les modèles sont évalués à partir de plusieurs critères comme l'erreur obtenue en comparant les flots calculés et les flots observés, le temps de calcul, la sensibilité du modèle aux variations des paramètres... Notons que les modèles ont été expérimentés à partir de données fournies par la compagnie aérienne Air Canada.

CHAPITRE DEUXIÈME

PROBLEME ET APPROCHE UTILISEE

Avant de définir de façon plus précise le problème et d'exposer l'approche utilisée, définissons certains termes qui reviendront souvent:

Vol: Description d'un service. Un vol est défini par l'itinéraire (Montréal-Chicago-Los Angeles), l'heure de départ et d'arrivée, le type d'avion.

Arc ou segment de vol: composante sans escale d'un vol (Montréal-Chicago).

Horaire: Ensemble des vols offerts par le transporteur aérien.

Marché : Groupe de passagers d'une origine-destination voulant partir dans un certain intervalle de temps*.

Chaîne : Chemin d'une origine à une destination composé d'arcs n'appartenant pas nécessairement au même vol.

Route : Les routes d'un marché sont les chaînes que peuvent utiliser les passagers de ce marché.

Escale : Une route avec escale est une route avec arrêt dans une ville, mais sans changement de vol.

Correspondance: Une route avec correspondance est une route avec arrêt dans une ville où s'effectue un changement de vol.

---

* La notion de marché utilisée dans la formulation des modèles est définie de façon plus précise à la section 3.4.

2.1 Définition du problème

Le problème consiste à modéliser la circulation des passagers sur un réseau de vols, de façon à estimer, pour une demande prédéterminée, l'utilisation de chacun des vols.

Pour formuler un tel modèle, il nous faut étudier deux facteurs importants: l'attraction des routes pour les passagers et la limite de capacité des avions. Ces deux facteurs sont déterminants pour le déplacement des passagers des origines aux destinations. En effet, un passager fait d'abord son choix de route en fonction de l'attraction des différentes routes offertes. Toutefois, la disponibilité des sièges sur les arcs (avions) qui composent la route n'est pas assurée. La limite de capacité des avions peut donc l'obliger à modifier son choix.

Comme nous le verrons aux chapitres 3 et 4, le comportement des passagers face à l'attraction des routes et à la limite de capacité des avions se modélise relativement bien lorsque les deux facteurs sont considérés de façon indépendante. Cependant, l'intéraction entre ceux-ci se traite plus difficilement. Nous verrons à travers la formulation des modèles M1 et M2, aux chapitres 5 et 6, deux façons bien différentes de traduire l'intéraction entre ces deux facteurs.

2.2 Différentes méthodes de traitement du problème

Dans le cadre de cette section, nous présentons différentes méthodes de traitement du problème se trouvant dans la littérature. Nous ne faisons par une revue exhaustive de tous les modèles existants. Nous voulons uniquement illustrer les différents types d'approche.

Comme les notions d'optimisation coopérative et d'optimisation égoïste reviennent souvent pour caractériser les différentes méthodes, définissons d'abord ces notions. Celles-ci correspondent à deux hypothèses différentes de comportement des passagers. L'optimisation coopérative est basée sur l'hypothèse suivante:

> . Pour se déplacer d'une origine à une destination, chaque passager utilise la route qui contribue le mieux à un objectif global de satisfaction de l'ensemble des passagers.

Par contre, l'optimisation égoïste s'appuie sur l'hypothèse suivante:

> . Chaque client choisit sa route en fonction de ses préférences sans coopérer pour respecter les prérences des autres.

Evidemment, cette dernière hypothèse correspond davantage à la réalité.

Les premières méthodes pour traiter la circulation des passagers furent des heuristiques mettant surtout l'emphase sur l'attraction. L'assignation des passagers est réalisée en parcourant séquentiellement les origines-destinations (o -d). Tous les passagers d'une o -d sont

assignés à la route la plus attrayante ou distribués sur différentes routes en proportion de l'attraction de celles-ci. Et, lorsque la capacité est dépassée sur un des vols, les passagers excédentaires sont assignés à d'autres routes. Ces méthodes reproduisent le comportement égoïste des clients, mais font un pauvre traitement de la limite de capacité des avions et du réajustement qu'elle impose aux clients en concurrence par rapport à l'utilisation des mêmes ressources. De plus, comme la solution obtenue dépend de l'ordre de parcours des o -d , ces modèles sont difficilement utilisables pour évaluer l'effet d'une modification de l'offre. Une modification peut changer le déroulement heuristique, perturber la solution et noyer son effet réel.

Le problème peut aussi se résoudre par simulation. A partir de données historiques, la demande est générée de façon aléatoire et l'affectation est faite aussitôt à un vol. En pratique, ces méthodes ne sont pas tellement utilisées, car le temps d'exécution d'un programme de simulation augmente très vite avec la grosseur du réseau.

Plusieurs études existent du côté des modèles de programmation linéaire. Dans le modèles linéaire, la circulation des passagers est traitée comme un problème de flot à plusieurs commodités utilisant un même réseau, les passagers de chaque origine-destination formant une commodité. La formulation classique du modèle linéaire est la suivante:

MODÈLE LINÉAIRE CLASSIQUE EXPRIMÉ EN FONCTION DU FLOT SUR LES ARCS

Minimiser $\sum_{i,j,p,q} w_{ij}^{pq} \; x_{ij}^{pq}$

s.a.

Contraintes de conservation de flot pour la paire origine-destination (p,q) ayant une demande d^{pq}	$\forall(p,q)$	(2.1)
Contrainte de capacité sur les arcs: le flot total sur l'arc (i,j) est plus petit ou égal à la capacité de l'avion multipliée par un coefficient de remplissage (80% par exemple)	$\forall(i,j)$	(2.2)

$$x_{ij}^{pq} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \text{ et } \forall (p,q) \qquad (2.3)$$

où x_{ij}^{pq} : flot de passagers de l'origine-destination (p,q) assigné à l'arc (i,j).

w_{ij}^{pq} : coefficient d'insatisfaction pour les passagers d'une paire origine-destination (p,q) utilisant l'arc (i,j).

Les bornes communes associées à la limite de capacité sur chaque arc rendent très coûteuse la résolution de ce type de problème pour les grands réseaux. Une variante de ce modèle, qui peut améliorer le temps de résolution du problème, consiste à définir le problème en terme du flot sur les routes à la place du flot sur les arcs. Comme chaque origine-destination est desservie seulement par quelques routes, cette modification génère un modèle avec un plus petit nombre de variables. La formulation de ce modèle linéaire exprimé à partir du flot sur les routes est la suivante:

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{o\text{-}d} \sum_{q \in S_{o\text{-}d}} I_q h_q$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{q \in S_{o\text{-}d}} h_q = d_{o\text{-}d} \quad (\forall\ o\text{-}d) \tag{2.4}$$

$$\sum_{q\ \varepsilon\ R_a} h_q \leq C_a \cdot \rho \ (\forall\ a) \tag{2.5}$$

$$h_q \geq 0 \quad (\forall\ q) \tag{2.6}$$

où

h_q : flot de passagers assigné à la route q

$d_{o\text{-}d}$: demande pour une o-d

C_a : capacité de l'avion pour l'arc a

ρ : coefficient de remplissage ($\simeq$ 80%)

R_a : ensemble des routes utilisant l'arc a

$S_{o\text{-}d}$: ensemble des routes desservant l'o-d

I_q : coefficient mesurant les inconvénients de la route q pour un passager de l'o-d en question

Le principal avantage des modèles linéaires par rapport aux modèles heuristiques est la possibilité, par l'analyse de sensibilité, d'évaluer de façon simple et significative les effets d'une modification d'horaire. Par contre, ces modèles, avec leur objectif de minimiser la somme des insatisfactions des passagers, réalisent une optimisation coopérative par opposition à l'optimisation égoïste désirée. De plus, la programmation linéaire produit des solutions extrémistes où certains avions sont utilisés à la limite permise tandis que d'autres sont vides, ces solutions ne représentant pas toujours la réalité.

Les faiblesses des modèles linéaires nous incitent à chercher de nouveaux modèles qui approcheraient davantage la réalité, produiraient des solutions mieux balancées et donneraient de meilleurs temps de résolution. Les deux modèles présentés dans ce travail appartiennent à la famille des modèles non-linéaires et répondent assez bien à ces attentes.

2.3 Approche utilisée

Les modèles non-linéaires M1 et M2 présentés dans ce travail diffèrent des modèles linéaires d'abord dans le traitement de la limite de capacité des avions. Les modèles linéaires attaquent le problème de façon déterministe. Les variables correspondent à des moyennes journalières du nombre de passagers sur un arc et une contrainte explicite force

ces variables à ne pas dépasser la capacité sur les arcs. Par contre, dans les modèles M1 et M2, la demande est traitée de façon stochastique. Le nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser un arc est considéré comme une variable aléatoire, car ce nombre varie d'une journée à l'autre pendant la période de planification. Et,la notion de passagers excédentaires définie à partir d'hypothèses sur la distribution de cette variable aléatoire permet d'intégrer la limite de capacité dans le modèle, sans utiliser de contraintes explicites qui limitent le flot sur les arcs. Cette nouvelle approche représente mieux la réalité et diminue grandement l'effort pour résoudre le problème.

Les deux modèles M1 et M2 sont définis en terme de routes. Le modèle M1, un modèle de programmation non-linéaire, s'obtient du modèle linéaire formulé en fonction du flot sur les routes en enlevant la contrainte de capacité et en ajoutant à l'objectif une pénalité correspondant aux revenus perdus en refusant des passagers, faute de place sur les routes. Ce terme non-linéaire permet au nouveau modèle de produire des solutions moins extrémistes. De plus, l'élimination de la contrainte de capacité laisse seulement les contraintes de réseau et le modèle devient beaucoup moins coûteux à résoudre même si l'objectif est devenu non-linéaire. Même s'il donne de bons résultats, ce modèle ne reproduit que l'optimisation coopérative.

Le modèle M2 consiste en un système d'équations non-linéaires qui ne se ramène pas à un problème de programmation mathématique, mais qui se rédoud tout de même par des méthodes efficaces. Ce modèle s'approche davantage de la réalité, d'une part parce qu'il reproduit l'optimisation égoïste et, d'autre part parce que les équations du modèle sont établies à partir d'hypothèses de comportement des passagers. La définition du modèle à partir d'hypothèses de comportement le rend plus intelligible par les gestionnaires et sa structure mathématique permet des analyses de sensibilité. Comme pour M1, dans le modèle M2, nous ne retrouvons pas la contrainte explicite de limite de capacité des avions qui venait compliquer la résolution du modèle linéaire. La notion de passagers excédentaires utilisée dans les équations du modèle remplace cette contrainte.

On appelle souvent le modèle M2, modèle d'équilibre ou problème de complémentarité non-linéaire à cause de son analogie avec les modèles de cette dénomination en transport automobile. Ces derniers correspondent aux modèles où chaque automobiliste minimise son temps de déplacement (optimisation égoïste) et où le temps de parcours d'un arc dépend des flots sur tous les autres arcs.

Ainsi, les modèles M1 et M2 permettent une modélisation plus réaliste du comportement des passagers sur un réseau tout en engendrant des problèmes plus simples à traiter. Nous pouvons donc escompter des résultats plus précis et un meilleur temps de calcul qu'avec les méthodes précédentes.

2.4 Réseau utilisé

Il s'agit maintenant de définir le réseau sur lequel nos modèles M1 et M2 vont distribuer les passagers. Construisons celui-ci en définissant d'abord un réseau espace-temps. Sur ce réseau, les noeuds sont représentés par une ville et une heure correspondant à l'heure de départ ou d'arrivée d'un segment de vol. Les arcs sont de trois types:

(1) Arc reliant le noeud de départ et le noeud d'arrivée d'un segment de vol entre deux escales.

(2) Arc d'escale reliant le noeud d'arrivée d'un vol et le noeud de départ de ce même vol après escale dans une ville.

(3) Arc de correspondance reliant le noeud d'arrivée d'un vol avec le noeud de départ d'un autre vol dans une même ville. Le réseau ne contient que les arcs de correspondance susceptibles d'être utilisés par certains passagers.

Sur ce réseau de départ, on peut retrouver toutes les chaînes que peut utiliser un passager d'une origine-destination. Rappelons qu'une chaîne est une suite d'arcs (arc de segment de vol, arc d'escale ou arc de correspondance) qui permet au passager de se déplacer d'une origine à une destination. Dans cet ensemble de chaînes possibles, retenons seulement les chaînes utilisables par les passagers. Une chaîne est utilisable si elle est susceptible d'être utilisée et s'il n'existe pas une autre chaîne partant à la même heure ou plus tard et arrivant avant. Toutes les chaînes n'utilisant pas de correspondance sont évidemment utilisables. Remarquons que les chaînes utilisables desservant une même

origine-destination n'ont pas d'arcs en commun. En effet, dans ce cas, plusieurs routes avec connexions empruntent le même vol et alors, seul la meilleure est utilisée. Par contre, un arc appartient généralement à plusieurs chaînes desservant des origines-destinations différentes.

Introduisons maintenant la notion de marché. Comme la demande ne suit pas une distribution uniforme par rapport à l'heure de la journée et que les clients ne peuvent être traités individuellement à partir de leur heure de départ désirée, nous les regroupons par intervalles de temps appelés marchés. Une origine-destination est divisée en autant de marchés qu'il y a de chaînes utilisables la desservant. Au qième marché correspond en fait la qième chaîne utilisable et un intervalle de temps pour lequel l'attraction de la chaîne q est maximum ou de façon équivalente; l'insatisfaction de la chaîne q est minimum sur l'ensemble des chaînes possibles*. Comme les passagers sont très sensibles à l'heure de départ des vols, cette approche nous permet d'obtenir un meilleur niveau de précision puisque chaque origine-destination est fractionnée en marché correspondant à un intervalle de temps pour l'heure de départ désirée.

Maintenant, définissons un nouveau réseau à partir du réseau sur lequel nous avons conservé seulement les arcs formant les chaînes utilisables par les passagers d'une origine-destination. Ajoutons de nouveaux noeuds et de nouveaux arcs à ce réseau pour y représenter les routes que peuvent utiliser les passagers de chacun des marchés. Nous avons choisi

---

* Au chapitre suivant, nous développons l'équation utilisée dans les modèles M1 et M2 pour mesurer l'insatisfaction d'une route pour un passager et nous précisons la notion de marché.

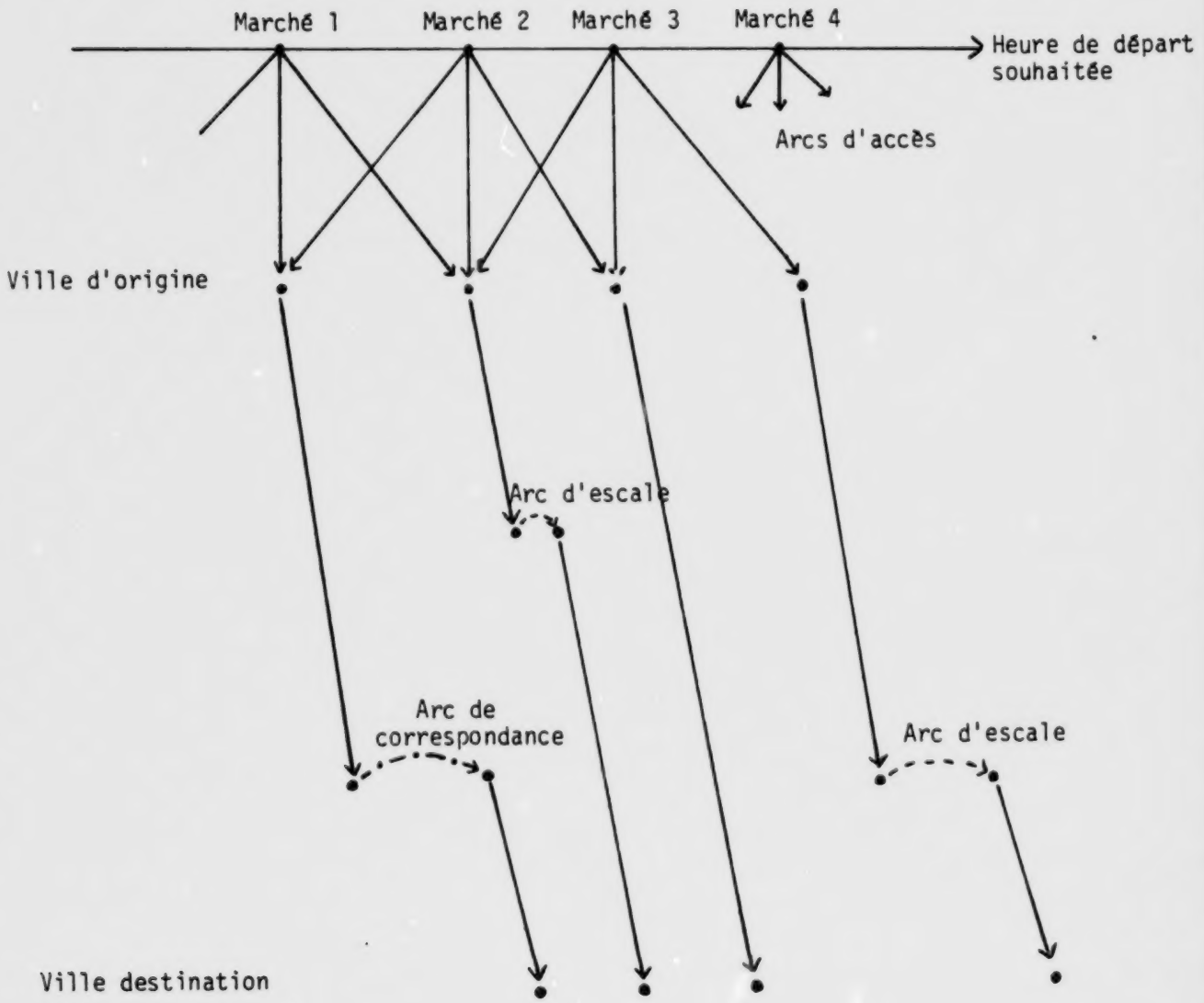
de restreindre l'accès des passagers d'un marché à trois routes (notons qu'il n'est pas difficile de modifier ce paramètre du modèle pour considérer d'autres situations avec un plus petit ou un plus grand nombre de routes accessibles).

Nous formons ces trois routes en ajoutant au réseau un noeud pour chacun des marchés, un arc d'accès du marché vers la chaîne associée au marché (pour la première route), un arc d'accès vers la chaîne précédente dans le temps (pour la deuxième route) et un arc d'accès vers la chaîne suivante dans le temps. N'oublions pas que nous parlons toujours de chaînes utilisables.

Ainsi, les ensembles de routes pour chaque marché sont disjoints. De plus, les routes d'un même marché n'ont pas d'arcs en commun, tandis que des routes appartenant à des marchés différents peuvent en avoir. La figure 2 illustre le réseau utilisé par les passagers d'une origine-destination. Sur cette figure, nous retrouvons les arcs d'escale et de correspondance, mais ces arcs n'apparaissent pas comme tel dans la formulation des modèles. Comme les escales et les correspondances n'occasionnent pas de coûts supplémentaires pour les passagers, ces arcs sont traités implicitement. Les désavantages que présente une route à escales ou correspondances par rapport à une route directe sont considérés lors de la formulation des équations mesurant l'insatisfaction d'une route pour un passager.

FIGURE 2

RÉSEAU UTILISÉ PAR LES PASSAGERS D'UNE ORIGINE-DESTINATION



CHAPITRE TROISIÈME

ATTRACTION D'UNE ROUTE POUR UN PASSAGER

Le traitement de la circulation des passagers nous amène à étudier l'attraction des vols offerts pour la clientèle. En général, un usager qui désire se déplacer d'une ville à une autre choisit une route en fonction de sa seule satisfaction. Son choix se porte sur la route qui lui apparaît la plus attrayante. Ainsi, il nous faut définir une mesure de l'attraction d'une route pour un passager,qui nous aidera à reproduire le comportement d'un passager faisant un choix parmi plusieurs routes d'une même origine-destination.

L'attraction d'une route particulière pour un passager peut être influencée par un ensemble de facteurs comme l'heure de départ ou d'arrivée, la durée du voyage, la qualité du service à bord...Jusqu'à présent, quelques études ont été faites pour déterminer les facteurs les plus déterminants pour l'attraction d'une route et quelques modèles ont été développés. Dans la première section de ce chapitre, nous présentons une revue de différents modèles de la littérature. Certains de ces modèles donnent une mesure d'insatisfaction d'une route pour un passager, tandis que d'autres définissent une mesure reliée à l'attraction de la route ou encore évaluent l'attraction relative des différentes routes. L'attraction relative d'une route pour les passagers d'un marché peut être définie comme une propor-

tion représentant la part des usagers du marché attirés par cette route ou d'une façon équivalente, comme un coefficient représentant la probabilité qu'un usager,pris au hasard,choisisse cette route.

Dans la deuxième section, nous décrivons la mesure d'insatisfaction utilisée dans l'objectif du modèle M1 pour conduire à une répartition des passagers réalisant une optimisation coopérative. En effet, l'objectif minimise l'insatisfaction générale des passagers. Nous préférons cette mesure à d'autres plus complexes, car elle donne de bons résultats malgré sa simplicité.

Pour le modèle M2, nous avons défini un nouveau modèle d'attraction que nous décrivons à la section 3. Le modèle M2 reproduit le comportement égoïste des passagers. Il distribue les passagers sur les routes en proportion des coefficients d'attraction relative des différentes routes. Ainsi, il est bien sensible au modèle d'attraction utilisé. Nous avons expérimenté plusieurs modèles d'attraction en utilisant différentes formulations mathématiques. Malheureusement, il ne nous a pas été possible d'augmenter la précision du modèle en ajoutant de nouveaux facteurs, car nous possédions peu d'informations sur le comportement des passagers. Notre banque de données n'était pas assez complète.

A la section 4, nous reprenons la notion de marché qui a été introduite au chapitre précédent lors de la définition du réseau utilisé, car la frontière entre deux marchés est calculée à partir de la mesure d'insatisfaction définie à la section 2.

3.1 Revue de littérature sur les modèles d'attraction

Nous présentons les modèles étudiés par ordre de complexité. Les premiers modèles sont assez simples et facilitent une première approche avec la notion d'attraction. Les derniers sont des modèles plus complexes, le nombre de facteurs considérés est plus grand.

Regardons d'abord une étude faite par E. Detzel [2]. Cet auteur propose une formule particulièrement simple pour définir la probabilité qu'un usager choisisse une certaine route. Il restreint l'accessibilité d'un usager à deux routes: la route dont l'heure de départ t_1 se trouve immédiatement avant l'heure de départ désirée par l'usager et la route dont l'heure de départ t_2 se trouve immédiatement après. Le seul facteur considéré est l'heure de départ de ces deux routes par rapport à l'heure de départ désirée par l'usager.

La formule (3.1) donne la probabilité de choisir la route 1 (route immédiatement avant l'heure de départ désirée) pour l'usager désirant partir au temps t et la formule (3.2) donne la probabilité de choisir la route 2 (route immédiatement après l'heure de départ désirée) pour ce même usager.

$$p_1 = \frac{(t_2 - t)}{(t_2 - t_1)} \qquad (3.1)$$

$$p_2 = (1 - p_1) = \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)} \qquad (3.2)$$

La plus grande qualité ou peut être le plus grand défaut de ce modèle, selon les besoins de l'utilisateur, est sûrement sa simplicité.

Le modèle suivant a été développé par S. Eriksen et N. Taneja [3], dans le cadre d'une étude pour évaluer la qualité des horaires offerts pour les vols commerciaux. Ce modèle donne une mesure reliée aux inconvénients d'une route.

Dans cette étude, la journée est séparée en intervalles de temps de une demi-heure et, la somme des inconvénients de la route i pour l'usager, dont l'heure de départ désirée se trouve dans l'intervalle de temps J_j, est donnée par la formule suivante:

$$\Pi_{ji} = |D_i - t_j| + (A_i - D_i) - Z + \gamma_i \qquad (3.3)$$

où

Π_{ji} : inconvénients en unité de temps de la route i pour l'usager dont l'heure de départ désirée se trouve dans l'intervalle de temps J_j

t_j : heure associée à l'intervalle de temps J_j (milieu de l'intervalle J_j)

D_i : heure de départ de la route i

A_i : heure d'arrivée de la route i

γ_i : facteur d'ajustement pour les arrêts sur la route. Il est égal à 0.0. pour les vols directs, à 0.5 pour les escales, 1.0 pour les correspondances

Z : nombre de changements de fuseaux horaires (positif si c'est de l'ouest à l'est et négatif si c'est de l'est à l'ouest).

Le terme γ_i donne une importance accrue à l'inconvénient dû aux arrêts, même si le facteur (A_i-D_i) qui représente la durée du vol est aussi fonction d'une certaine façon du nombre d'arrêts. Le terme Z est une correction pour tenir compte du décalage sur le temps de voyage perçu en heure locale.

Le modèle d'attraction présenté maintenant a été développé dans le cadre du transport ferroviaire. Intéressés à déterminer, pour un horaire donné, la répartition théorique de la demande de voyage par chemin de fer, A. Aurignac et M. Benattar [1] ont défini des coefficients donnant la probabilité qu'un usager choisisse de voyager sur le train i. Ces coefficients représentent l'attraction relative du train i.

Pour calculer ces coefficients, les auteurs définissent d'abord une fonction $T_i(t,\lambda)$ dite "temps généralisé" du train i:

$$T_i(t,\lambda) = \theta_i + \delta\,|t_i-t| + \frac{P_i}{\lambda} \qquad (3.4)$$

où

t : temps de départ désiré par l'usager

λ : valeur du temps pour l'usager

$T_i(t,\lambda)$: temps généralisé du train i pour l'usager désirant partir au temps t et ayant pour valeur du temps λ

t_i : temps de départ du train i

θ_i : temps de trajet du train i

P_i : prix du billet dans le train i;

δ : paramètre à déterminer.

Cette fonction $T_i\ (t,\lambda\ )$ mesure en fait les désavantages du train i pour un usager désirant partir au temps t. Plus le temps généralisé $T_i\ (t,\lambda\ )$ d'un train i est grand par rapport à celui des autres trains, moins l'usager aura intérêt à choisir ce train.

A partir de $T_i\ (t,\lambda\ )$, ils déterminent ensuite une nouvelle fonction $U_i\ (t,\lambda\ )$ dite "l'utilité" du train i:

$$U_i\ (t,\lambda\ ) = \left[\frac{1}{T_i(t,\lambda)}\right]^{\alpha} \tag{3.5}$$

où

$U_i\ (t,\lambda\ )$: utilité du train i pour l'usager désirant partir partir au temps t et de valeur du temps λ

α : paramètre à déterminer.

Pour une valeur fixe de λ , la courbe $U_i(t,\lambda\ )$ décroît symétriquement sur l'axe du temps lorsqu'on s'éloigne de l'instant t_i de départ du train i. Cette fonction $U_i\ (t,\lambda\ )$ représente donc une mesure reliée à l'attraction du train i pour l'usager désirant partir au temps t.

Ainsi, pour l'usager désirant partir au temps t et dont la valeur du temps est λ , la probabilité de choisir un train i est définie par le rapport de l'utilité du train i à la somme des utilités de tous les trains. Cette probabilité est notée $X_i(t,\lambda\ )$:

$$X_i\ (t,\lambda) = \frac{U_i\ (t,\lambda\ )}{\sum_{k=1}^{n} U_k(t,\lambda\ )} \tag{3.6}$$

Pour terminer, les auteurs divisent la journée en p intervalles disjoints J_1 J_2 ...J_p appelés intervalles de référence, en posant l'hypothèse que les usagers désirant partir au cours de la période J_j veulent plutôt partir à l'instant t_j, milieu de J_j. Et, en prenant une valeur du temps moyenne $\bar{\lambda}$ pour tous les usagers, ils définissent la probabilité qu'un usager de l'intervalle J_j choisisse le train i, à l'aide de l'équation suivante:

$$\tilde{X}_i = \frac{U_i\ (t_j, \bar{\lambda})}{\sum_{k=1}^{n} U_k(t_j, \bar{\lambda})} \qquad (3.7)$$

Même s'il a été développé dans le contexte du transport ferroviaire, ce modèle pourrait s'adapter facilement pour le transport aérien.

Revenons maintenant du côté du transport aérien avec des études menées à Air Canada. Dans un rapport, publié à Air Canada, G. Gagnon [4] définit pour chaque route un intervalle de temps où cette route est la plus attrayante parmi l'ensemble des routes. Il estime que l'attraction de la route 1 se termine (ou que l'attraction de la route 2 commence) au temps:

$$d_1 + \frac{a^2}{a + d} \qquad (3.8)$$

où

d : intervalle de temps entre deux départs adjacents $=(d_2-d_1)$

a : intervalle de temps entre deux arrivées adjacentes $=(a_2-a_1)$

ou sous forme plus générale

$$d_1 + \frac{a^{\alpha} \cdot d^{\beta}}{(a+d)} \qquad (3.9)$$

où α et β sont prédéterminés et $\alpha + \beta = 2$

Dans un rapport subséquent fait à Air Canada [5], une toute nouvelle approche a été utilisée. Deux formulations sont proposées pour modéliser l'attraction d'une route pour un usager: une formulation exponentielle et une formulation hyperbolique.

a) Formulation exponentielle:

$$F_p(t) = ACN_p \cdot e^{-(S_p^{\beta} \cdot |t_p - t|)} \qquad (3.10)$$

où

t : temps de départ désiré pour l'usager

$F_p(t)$: attraction de la route p pour l'usager désirant partir au temps t

ACN_p : facteur relatif à l'avion pour la route p

S_p : durée de vol relative pour la route p

t_p : temps de départ pour la route p

α, β : paramètres à être évalués.

La variable ACN_p tient compte du type de l'avion et du nombre d'escales ou connexions pour la route p.

b) Formulation hyperbolique:

$$F_p(t) = \frac{ACN_p}{S_p^{\beta} \, |t_p - t|^{\alpha}} \qquad (3.11)$$

où les variables sont définies comme précédemment.

Avec la formulation exponentielle, on remarque que $F_p(t)$ tend vers ACN_p lorsque t s'approche de t_p, tandis qu'avec la formulation hyperbolique, $F_p(t)$ tend vers l'infini. Pour corriger cette situation, dans la formulation hyperbolique, une variable additionnelle représentant le niveau maximum d'attraction, est obtenue en définissant une valeur minimum pour $|t_p-t|$ i.e.:

$$0.0 < \min |t_p - t| < x \ .$$

Par rapport aux modèles précédents, les modèles d'Air Canada considèrent un nouveau facteur: le type de l'avion. Malheureusement, les rapports publiés à Air Canada ne donnent pas la forme de la variable ACN_p associée à ce facteur.

Regardons maintenant une étude un peu spéciale de G. Shaw [6] sur l'intéraction entre l'horaire et la demande associée à chacune des routes. Dans cette étude, nous retrouvons une procédure de simulation pour prédire le nombre de passagers sur chaque route, dans laquelle est définie deux étapes de décision pour l'usager qui choisit une route.

Dans une première étape, l'usager qui désire voyager fait un choix parmi deux routes, car deux routes seulement sont considérées comme attrayantes: la route dont l'heure de départ se trouve immédiatement avant l'heure de départ désirée par l'usager et la route dont l'heure de départ se trouve immédiatement après. Le choix de l'usager est simulé à partir des probabilités suivantes:

$$P_p(t) = \frac{(t_f - t)^{\alpha} \; S_f^{\beta}}{(t-t_p)^{\alpha} \; S_p^{\beta} + (t_f - t)^{\alpha} S_f^{\beta}} \qquad (3.12)$$

$$P_f(t) = 1 - P_p \qquad (3.13)$$

où

t_p : heure de départ de la route qui se trouve immédiatement avant l'heure t. Cette route est notée p

t_f : heure de départ de la route qui se trouve immédiatement après l'heure t. Cette route est notée f

S_p et S_f: durée de vol respectives pour les routes p et f

$P_f(t)$: probabilité que l'usager désirant partir au temps t préfère la route f

$P_p(t)$: probabilité que l'usager désirant partir au temps t préfère la route p

α, β : paramètres à déterminer.

Ces probabilités représentent l'attraction relative des deux routes par rapport aux facteurs: heure de départ et durée de vol pour chacune des routes. Les valeurs suggérées par l'auteur pour les paramètres α et β sont $\alpha = \beta = 2$.

Dans la deuxième étape, l'usager décide s'il accepte le désavantage en temps $T = |t-t^*|$ pour utiliser la route préférée (route choisie à l'étape précédente), où t^* est l'heure de départ de cette route. La décision de l'usager est simulée à partir de $Q(T)$ définie comme la probabilité qu'un usager choisi au hasard accepte d'avancer ou de retarder son voyage du temps $T = |t-t^*|$, pour utiliser sa route préférée. Pour représenter $Q(T)$, l'auteur suggère la distribution d'Erlang:

$$Q_k(T) = \exp\left(\frac{-CT}{V_k}\right) \sum_{x=1}^{C-1} \left(\frac{CT}{V_k}\right)^x \frac{1}{x!} \qquad (3.14)$$

où

k : indice d'une origine-destination

V_k : valeur moyenne acceptable pour T

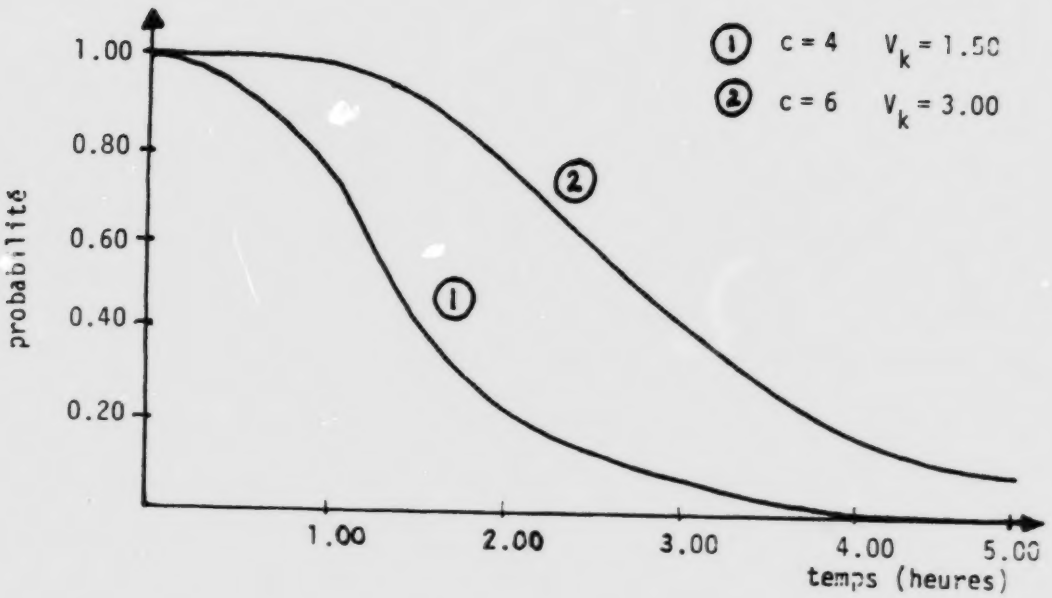
C : paramètre spécifiant la variance de T.

L'allure de cette courbe est illustrée à la figure 3.

Cette fonction $Q_k(T)$ peut être vue comme un coefficient d'attraction, attraction mesurée par rapport au facteur heure de départ seulement. Pour chaque route, $Q_k(T)$ prend une valeur différente et plus la route est attrayante par rapport à l'heure de départ (c.-à-d., $|t-t_q|$ est petit), plus $Q_k(T)$ prend une grande valeur.

FIGURE 3

FONCTION $Q_k(T)$



Le prochain modèle discuté a été développé par Douglas Aircraft [11]. Ce modèle diffère des précédents parce qu'il estime le nombre de passagers voyageant sur une route plutôt que le nombre de passagers désirant voyager sur une route, en tenant compte de la capacité des avions.

En raison de cela, nous avons éliminé dans ce modèle, le terme relié à la capacité pour obtenir le modèle de Douglas modifié*:

$$W_r = \prod_{i=1}^{7} M_r(i) \qquad (3.15)$$

où

W_r : mesure reliée à l'attraction de la route r

$M_r(1)$: fonction de la durée du voyage (ou alternativement du nombre d'arrêts)

$M_r(2)$: facteur relié à la fréquence (nombre de jours par semaine que le vol a lieu)

$M_r(4)$: facteur de préférence pour le type d'avion

$M_r(5)$: facteur de préférence pour l'heure de départ

$M_r(6)$: facteur de préférence pour le jour de la semaine

$M_r(7)$: facteur relié aux tarifs spéciaux.

Des formes sont proposées pour les multiplicateurs $M_r(1)$ et $M_r(5)$

$M_r(1)$: durée du voyage (arrêts)

Deux formes sont présentées pour le multiplicateur $M_r(1)$, une fonction de la durée du voyage ou encore une fonction du nombre d'arrêts.

Si la durée du voyage est utilisée, alors

$$M_r(1) = \frac{1}{(\text{temps de durée})^{XK(i,j)}} \qquad (3.16)$$

* Une autre modification de ce modèle pourrait être d'éliminer les multiplicateurs $M_r(2)$ et $M_r(6)$ pour considérer l'attraction sur un intervalle de temps plus restreint, une journée par exemple. Les modèles précédents ont été construits sur un intervalle de temps plus limité.

L'exposant XK est une fonction de l'origine-destination (i,j). Cet exposant agit en tant que valve sur le poids relatif entre les vols. Plus la valeur de XK est grande, plus le poids donné à une différence de durée entre deux routes est grand.

Si on désire utiliser le nombre d'arrêts comme critère pour le calcul de $M_r(1)$ alors:

$$M_r(1) = STOPF^{ij}_k \qquad (3.17)$$

où

STOPF = paramètre d'entrée qui dépend de l'origine-destination et du nombre d'arrêts $0 \leq STOPF^{ij}_k \leq 1$

(i,j) = origine-destination

k = nombre d'arrêts.

$M_r(5)$: préférence pour l'heure de départ

Ce multiplicateur assigne une préférence au temps de départ de la route r. Ces facteurs de préférence sont des données d'entrée mises sous forme d'histogramme pour chaque demi-heure (voir Fig.4). La forme proposée pour $M_r(5)$ est:

$$M_r(5) = TODW_{ij}(t) \qquad (3.18)$$

où

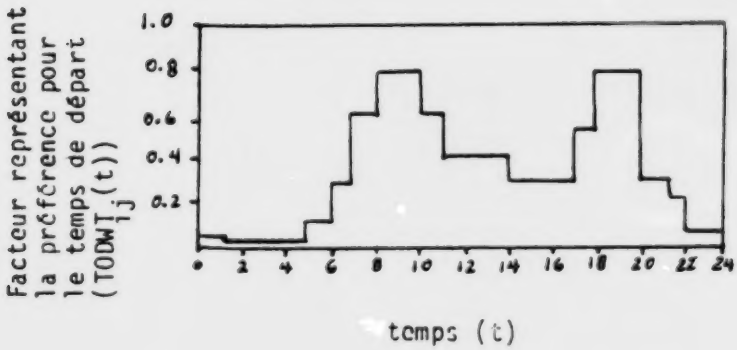
$TODW_{ij}(t)$ = valeur donnée au temps t par l'histogramme associé à l'origine-destination (i,j)

t = temps de départ désiré.

Pour une autre formulation du multiplicateur $M_r(5)$, consulter la référence [11].

FIGURE 4

HISTOGRAMME DU TEMPS DE DEPART PRÉFÉRÉ POUR LES PASSAGERS D'UNE ORIGINE-DESTINATION (i,j)



Et la proportion des usagers qui choisissent la route r est définie comme suit:

$$P_r = \frac{W_r}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \qquad (3.19)$$

Le dernier modèle considéré a été développé par Boeing [12], [13] La particularité de ce modèle est l'idée de considérer deux classes d'usagers en distinguant deux types de comportement: un premier type d'usager tient compte uniquement de l'horaire (heure de départ et d'arrivée, fréquence des vols) pour choisir la route sur laquelle il voyagera, tandis qu'un second type d'usager est influencé dans son choix par l'horaire, mais aussi par plusieurs autres facteurs.

La forme générale du modèle est la suivante:

$$P_r = (1-c)\frac{F_r S_r T_r P_r A_r}{\sum_i F_i S_i {}_i P_i A_i} + c\,\frac{F_r S_r T_r}{\sum_i F_i S_i T_i} \qquad (3.20)$$

où

P_r : proportion des usagers qui désirent voyager sur la route r

c : fraction de la demande qui est sensible seulement à l'horaire (heure de départ, durée de vol)

S_r : facteur d'arrêts (relatif au nombre d'escales et connexions)

T_r : facteur de préférence pour l'heure de départ

P_r : facteur d'environnement du vol (apparence, confort, service)

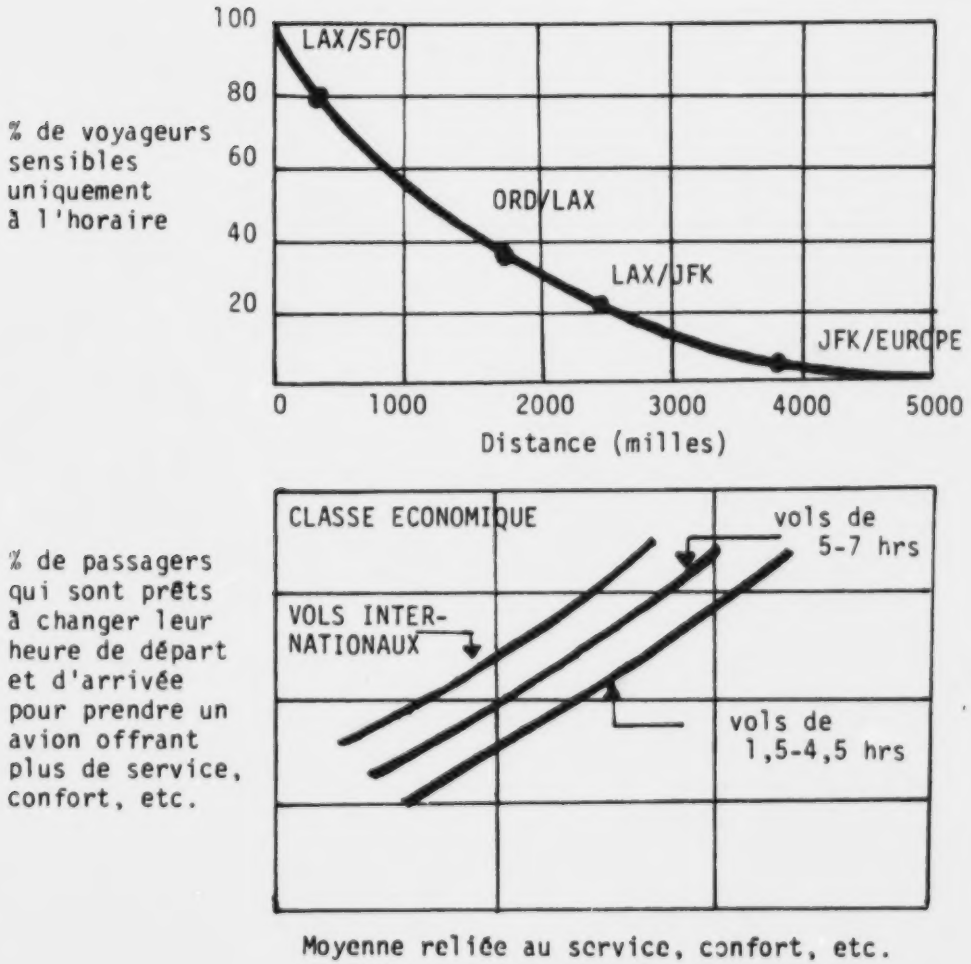
A_r : facteur de préférence pour le type d'avion

F_r : fréquence de vol.

Boeing a fait une brève analyse (voir Fig. 5) pour montrer l'importance de séparer les usagers en deux classes et de considérer l'attraction différemment pour chacune de ces classes. Il a été remarqué que la proportion des voyageurs sensibles seulement à l'horaire décroît avec la distance entre l'origine et la destination (et de la durée du vol, car la durée du vol dépend en grande partie de la distance entre l'origine et la destination).

FIGURE 5

ANALYSE DE SENSIBILITE DES VOYAGEURS
A L'HORAIRE ET AU NIVEAU DE SERVICE



De plus, Boeing suggère des valeurs pour la variable c (fraction de la demande qui est sensible uniquement à l'horaire) en fonction de la distance O-D en milles.

(milles) Distance entre O-D	0	400	800	1500	3000	4500
Valeurs de la variable c	1	.75	.59	.38	.14	.02

Et, suggère les valeurs suivantes pour la variable S_r en fonction du nombre d'arrêts:

Nombre d'arrêts	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de la variable S_r	1	.5	.25	.167	.125	.1	.083	.071

A partir de ces différentes études sur la notion d'attraction, nous pouvons reconnaître les facteurs les plus déterminants dans le choix d'une route pour un usager qui désire se déplacer d'une origine à une destination.

1) heure de départ ou d'arrivée de la route
2) durée du voyage
3) nombre d'escales ou correspondances
4) type d'avion (grosseur confort...) utilisé
5) service offert aux passagers
6) tarifs spéciaux

De plus, nous retenons l'idée de considérer deux types de comportement de l'usager: le premier type d'usager choisit sa route uniquement en fonction des contraintes de temps (facteur (1) (2) et (3) et le deuxième type d'usager est influencé par tous les facteurs. Dans le premier type d'usager, on peut retrouver par exemple les clients qui voyagent par affaires et dans le second, les touristes.

Regardons maintenant la forme des modèles proposés. Dans cette revue de littérature, nous pouvons distinguer de façon générale deux types de modèles: les modèles dits additifs (comme le modèle de S. Eriksen et N Taneja) et ceux dits multiplicatifs (comme le modèle de Douglas Aircraft). Ces deux types de modèles se distinguent principalement par l'importance qu'ils attribuent aux facteurs prenant des valeurs extrêmes. Une route présentant un très grand désavantage en regard d'un des facteurs aura une

très petite attraction avec le modèle multiplicatif, car avec ce type de modèle, les effets se multiplient. Si un des termes tend vers zéro, l'attraction, elle aussi, tendra vers zéro. Le modèle additif, lui, ne présente pas ce comportement. Ainsi, il pourrait être intéressant de développer un modèle à la fois multiplicatif et additif, en revoyant au préalable le type d'effet que nous voulons obtenir des différents facteurs, pour le choix des termes additifs et multiplicatifs.

3.2 Mesure d'insatisfaction utilisée dans le modèle M1

La mesure d'insatisfaction présentée dans le cadre de cette section a été développée par F. Soumis [7]. Dans cette mesure, les deux facteurs suivants sont condidérés:

(1) L'heure de départ de la route

Si l'heure de départ d'une route s'écarte de l'heure de départ désirée par le passager, elle le force à devancer ou à retarder son départ. Ce désavantage se mesure par le "temps d'attente". Le temps d'attente est la différence entre l'heure à laquelle le passager désire voyager et l'heure de départ sur cette route.

(2) La durée du voyage

Plus une route présente d'escales et de correspondances, plus la durée du voyage risque d'être grande. Cet inconvénient se mesure par le "temps ajouté au voyage". Le temps ajouté au voyage est la différence entre le temps du voyage sur cette route et la durée d'un vol direct.

L'insatisfaction d'une route est exprimée comme une fonction de l'heure de départ désirée par l'usager à l'aide de l'équation linéaire suivante:

$$I_q(t) = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3 \qquad (3.21)$$

où

t : temps de départ désiré par l'usager

$I_q(t)$: mesure d'insatisfaction de la route q pour l'usager désirant partir au temps t

t_q : temps de départ associé à la route q

T_1 : $\begin{cases} (t_q - t) \text{ si } t_q > t & : \text{ temps d'attente positif} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

T_2 : $\begin{cases} (t - t_q) \text{ si } t > t_q & : \text{ temps d'attente négatif} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

T_3 : temps ajouté au voyage par rapport à un vol direct.

Comme les clients ne peuvent être traités individuellement à partir de leur heure de départ désirée et qu'ils ont déjà été regroupés par intervalles de temps appelés marchés, l'insatisfaction d'une route est agréee pour le groupe de passagers d'un marché en définissant des coefficients d'insatisfaction. Le coefficient d'insatisfaction d'une route q pour les passagers d'un marché, noté CI_q est défini en prenant la moyenne, sur l'ensemble des demi-heures, de l'insatisfaction de la route q pondérée par le nombre de passagers voulant partir durant la demi-heure. Pour chaque intervalle de temps de une demi-heure, l'insatisfaction est mesurée

au temps t milieu de l'intervalle. Le nombre de passagers voulant partir durant chaque intervalle est donné par une courbe de distribution de la demande en fonction de l'heure. On retrouve une telle courbe à la figure 7.

Comme nous le verrons plus loin lors de l'expérimentation des modèles, cette mesure d'insatisfaction utilisée dans l'objectif du modèle M1 donne de bons résultats malgré sa simplicité.

3.3 Nouveau modèle d'attraction utilisé dans le modèle M2

Le nouveau modèle d'attraction présenté dans cette section s'appuie sur la mesure d'insatisfaction définie à la section précédente. Rappelons que ce modèle d'attraction servira dans la formulation du modèle d'assignation des passagers M2.

Lors de la définition du réseau (section 2.4), nous avons supposé que seulement trois routes peuvent être utilisées par les passagers de chaque marché. En supposant maintenant que les passagers d'un marché vont se distribuer sur les trois routes possibles en fonction des coefficients d'insatisfaction CI_q, nous prolongeons le développement de F. Soumis en définissant la proportion des usagers d'un marché qui choisissent une des trois routes. Pour cela, nous utiliserons un modèle LOGIT:

$$A_q = \frac{(T_r - CI_q)^\alpha}{\sum_{p \in Q_r} (T_r - CI_p)^\alpha} \qquad \text{avec} \quad T_r = \sum_{p \in Q_r} CI_p \qquad (3.22)$$

où

r : marché contenant la route q

A_q : proportion des usagers du marché r qui choisissent la route q

CI_q : coefficient d'insatisfaction de la route q pour un usager du marché r

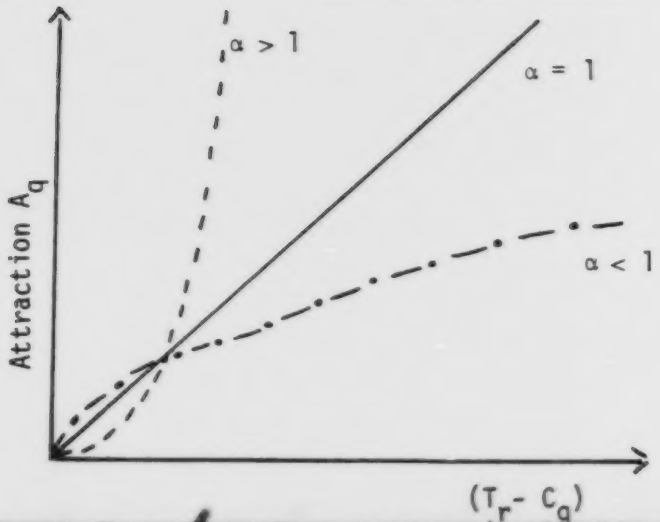
Q_r : ensemble des trois routes que peut choisir un usager du marché r

α : paramètre à déterminer

Dans cette formule, nous considérons (T_r-CI_q) plutôt que CI_q pour obtenir une quantité qui augmente avec l'attraction d'une route. Il est facile de voir que si la route q est attrayante, CI_q prendra une petite valeur et alors le terme (T_r-CI_q) prendra une grande valeur. Cependant, on ne peut affirmer que la relation entre le coefficient d'attraction A_q et le terme (T_r-CI_q) est linéaire. Le rôle du paramètre α dans cette formule est d'établir une relation plus exacte entre le terme (T_r-CI_q) et l'attraction proprement dite.

FIGURE 6

RÔLE DU PARAMÈTRE α



3.4 Construction des marchés

Comme nous l'avons vu lors de la définition du réseau (section 2.4), les passagers d'une origine-destination sont regroupés par marché, chaque marché correspondant à une chaîne utilisable et un intervalle de temps. L'ensemble des passagers d'un marché est défini comme ceux pour qui la chaîne associée présente l'attraction maximum ou encore le minimum d'insatisfaction sur l'ensemble des chaînes utilisables. La construction des marchés se fait donc à partir d'une mesure d'attraction ou d'insatisfaction. Comme les modèles M1 et M2 sont basés sur la mesure d'insatisfaction présentée à la section 3.2, nous utilisons aussi cette mesure pour la construction des marchés.

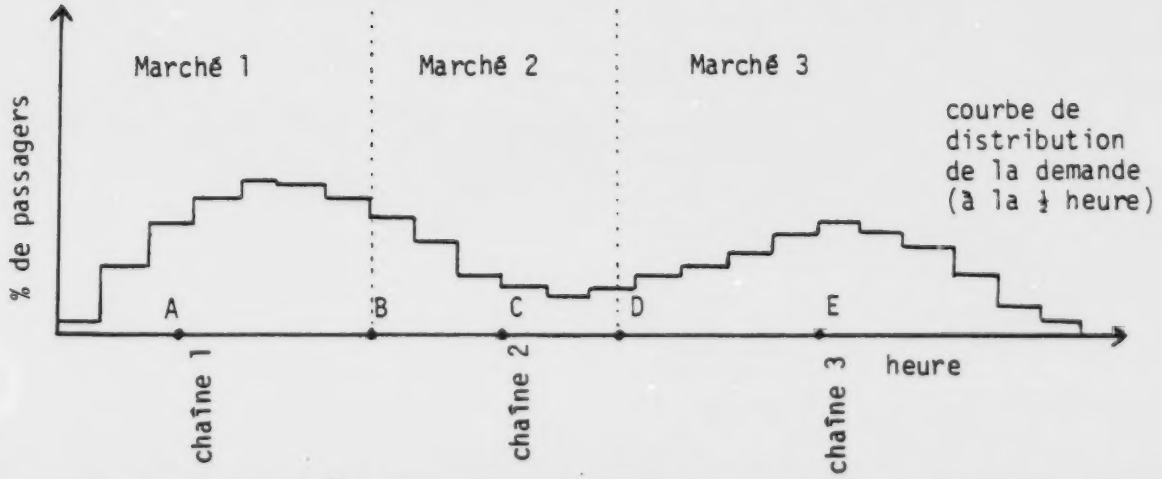
La figure 7 peut nous aider à comprendre le partage en marchés, pour une origine-destination. Sur cette figure, le point B représente la frontière entre les deux premiers marchés. C'est le temps t pour lequel I_1 (t) = I_2 (t), point d'égale insatisfaction pour les deux routes. Comme l'insatisfaction d'une route diminue linéairement à mesure que l'on s'approche de l'heure de départ de celle-ci, la route présentant le minimum d'insatisfaction pour un usager dont l'heure de départ désirée se situe dans l'intervalle (A,B) est la route 1. Cet intervalle correspond donc au marché associé à la route 1. De la même façon, la route 2 est celle qui présente le minimum d'insatisfaction sur l'intervalle (B,C) alors cet intervalle représente le marché associé à la route 2.

Il faut noter que le temps forme un cycle de 24 heures, le premier vol suit le dernier. Il y a donc une frontière à déterminer entre ces deux vols et celle-ci n'est pas nécessairement la fin de la journée.

Bien qu'à chaque marché correspond la route la plus attrayante pour les passagers du marché, nous voulons insister sur le fait que les modèles M1 et M2 n'affectent pas tous les passagers d'un marché sur la route correspondante. En effet, les passagers d'un marché ont accès à trois routes comme nous l'avons expliqué à la section 2.4 et ils sont distribués sur ces trois routes en tenant compte de l'attraction de celles-ci.

FIGURE 7

PARTAGE EN MARCHÉS DES PASSAGERS D'UNE ORIGINE-DESTINATION



CHAPITRE QUATRIÈME

LIMITE DE CAPACITE DES AVIONS

Maintenant que nous avons modélisé l'attraction d'une route pour nous aider à traduire le comportement des passagers face à un choix de routes, considérons la limite de capacité des avions venant influencer ce choix.

Un avion est aménagé pour transporter un certain nombre de passagers. Si le vol offert attire plus de passagers que l'avion peut en transporter, ces passagers doivent être détournés sur d'autres vols ou tout simplement refusés. La situation est simple lorsque l'on considère une seule journée. Par contre, quant on doit traiter simultanément plusieurs journées ayant des nombres variables de passagers, il ne saurait être question d'estimer à l'avance ces nombres pour chaque marché, chaque jour et de faire la planification à ce niveau de détail. Il est d'ailleurs déjà difficile de bien estimer le nombre journalier moyen de passagers désirant voyager. La planification se fait donc avec des moyennes.

Il ne faut évidemment pas planifier en tentant de remplir les avions en moyenne, car il manquerait de places un jour sur deux. Face à ce problème, il est classique de définir un maximum pour le coefficient de remplissage moyen de façon à réserver des sièges pour les fluctuations journalières de la demande. Cette méthode, même si elle est très répan-

due, présente des problèmes. Elle est très sensible au choix des coefficients de remplissage. Planifier avec des coefficients plus bas que la valeur idéale se répercute directement sur les coûts d'opération en exigeant plus d'avions. Par contre, planifier avec des coefficients trop élevés, fait espérer des bénéfices non réalisables.

L'approche que nous utilisons dans les modèles M1 et M2 représente mieux la réalité. La demande journalière est traitée de façon stochastique, tenant compte ainsi de la variabilité journalière de celle-ci. Et, la notion de passagers excédentaires définie comme l'espérance mathématique d'une certaine variable aléatoire permet d'intégrer la limite de capacité dans les modèles sans utiliser de contraintes explicites et sans faire appel à la notion de coefficient de remplissage, pour limiter le flot sur les arcs.

A la lecture de la première section du chapitre,où nous comparons de façon plus détaillée la nouvelle approche utilisée avec l'approche classique, la notion de passagers excédentaires se précisera. Cette notion est d'abord présentée dans un contexte général et elle est précisée dans les contextes particuliers des modèles M1 et M2,dans les sections 2 et 3.

Comme nous le verrons, les modèles M1 et M2 considèrent le comportement des passagers dans des contextes différents. Ils ne sont pas formulés à partir du même type de variables. En raison de cela, nous devons distinguer la notion de passagers excédentaires dans les deux contextes

et établir des équations différentes pour le calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route.

Notons que les équations décrites à la section 4.2 pour le calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route à partir des variables du modèle M1 ont été établies par F. Soumis [7]. Par contre, les équations se trouvant à la section 4.3 pour le calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route à partir des variables du modèle M2 sont des approximations que nous avons développées. Nous avons défini et expérimenté plusieurs approximations en passant des plus simples aux plus complexes. Toutefois, n'ayant retenu qu'une seule approximation en vertu de sa simplicité et de la qualité de ses résultats, nous n'avons pas cru bon de présenter les alternatives étudiées afin de réduire la longueur de l'exposé.

4.1 Notion de passagers excédentaires: une nouvelle approche

Dans le modèle classique d'assignation des passagers, une contrainte explicite force les passagers à utiliser une autre route dès que , sur un des arcs de la route.le flot atteint la borne spécifiée par le coefficient de remplissage*. L'approche proposée ici vise à remplacer la notion de coefficient de remplissage par la notion d'espérance du nombre de passagers excédentaires en considérant le nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser un arc comme une variable aléatoire. Sous

---

* A la section 2.2, nous avons présenté la formulation classique du modèle d'assignation des passagers. Il peut être intéressant d'y revenir.

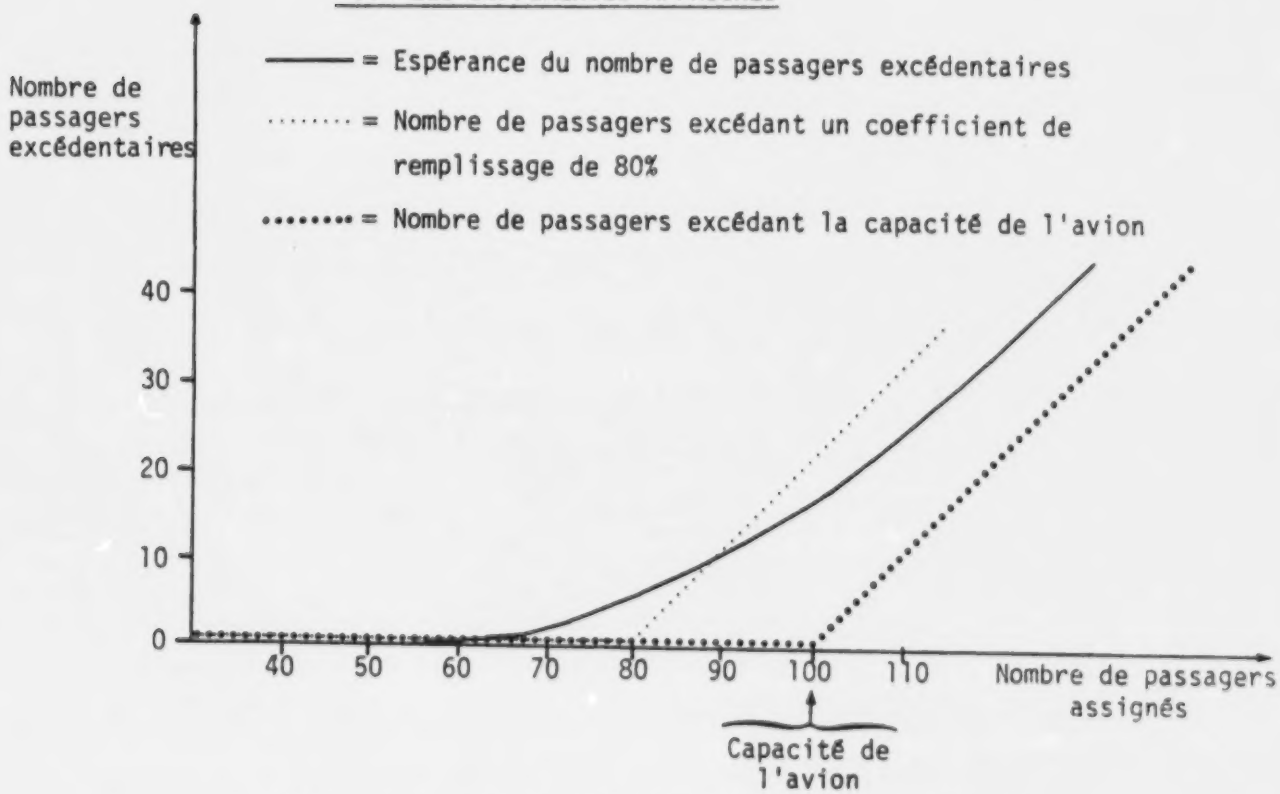
certaines hypothèses sur la distribution de cette variable aléatoire, notre modèle détermine l'espérance mathématique du nombre de passagers excédentaires sur un arc.

Suivant l'approche classique, tous les passagers peuvent être transportés aussi longtemps que le remplissage moyen demeure inférieur à la borne spécifiée par le coefficient de remplissage. Ce niveau dépassé, automatiquement les passagers supplémentaires se retrouvent sans place. Par contre, suivant la nouvelle approche, la valeur de l'espérance du nombre de passagers excédentaires sur un arc est une fonction croissante du nombre de passagers qui désirent prendre l'avion. Ainsi, la valeur est nulle quand le nombre de passagers est faible, devient positive pour les taux de remplissage courants et poursuit sa croissance de façon continue pour atteindre une fraction importante de passagers, quand le nombre de passagers qui désirent prendre l'avion dépasse la capacité. La figure 8 illustre la différence entre les deux approches.

Ainsi, l'approche classique donne lieu à un modèle d'assignation des passagers déterministe où les passagers sont assignés sur les routes qui exercent le plus d'attrait, en limitant le nombre par avion de façon à ne pas avoir de passagers excédentaires. L'assignation des passagers effectuée en considérant l'espérance du nombre de passagers excédentaires donne lieu à un modèle stochastique (comme le modèle M1 ou M2) où le nombre de passagers excédentaires n'est pas nul pour les niveaux de remplissage courants.

FIGURE 8

PASSAGERS EXCÉDENTAIRES EN FONCTION DU NOMBRE DE PASSAGERS QUI TENTENT D'UTILISER UN AVION POUR LES DIFFÉRENTES APPROCHES



4.2 Calcul du nombre de passagers excédentaires dans le contexte du modèle M1

Le modèle étant défini en terme de routes, nous devons calculer le nombre de passagers excédentaires sur ces dernières. Cependant, comme la limite de capacité intervient au niveau des arcs, nous calculons le nombre de passagers excédentaires sur les arcs qui composent une route pour en déduire ensuite le calcul du nombre de passagers excédentaires sur la route.

Pour bien comprendre tous ces calculs, nous décrivons d'abord le contexte du modèle en précisant la définition des variables et en spécifiant la notion de passagers excédentaires dans ce contexte particulier.

4.2.1 Contexte du modèle

Le modèle M1 traduit le comportement des passagers seulement dans leur dernier choix de route. En effet, les variables du modèle associées aux routes sont les suivantes:

f_q : flot de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser la route q

En considérant les passagers à leur dernier essai, deux situations sont possibles. La première correspond à un passager qui, après un certain nombre d'essais où il a été refusé faute de place, trouve finalement une place sur une route. On parlera alors de son dernier essai. La deuxième situation correspond à un passager qui, après un certain nombre d'essais où il a été refusé faute de place, tente un dernier essai où il est à nouveau refusé faute de place. Il se décourage alors et décide de ne plus voyager.

Ainsi, le modèle M1 considère qu'une partie des passagers refusés faute de place décident de ne plus voyager. Cette partie correspond en fait aux passagers qui, à leur dernier essai, sont refusés faute de place.

Par conséquent, lorsque nous parlons de passagers excédentaires dans le contexte du modèle M1, nous faisons référence à cette partie des passagers.

Dans le contexte du modèle M1, le nombre de passagers excédentaires sur une route q est donc spécifié comme suit:

$P_q(f)$: nombre de passagers qui, à leur dernier essai, sont refusés faute de place sur la route q.

Et la demande est définie comme suit:

d_r : nombre total de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser les routes du marché r.

Maintenant, pour mieux illustrer le contexte du modèle M1 et faire l'analogie avec le modèle M2, définissons de nouvelles variables qui n'apparaîtront pas comme tel dans la formulation du modèle.

k_q : flot de passagers qui utilisent la route q

Il est important de différencier les variables f_q et k_q. Pour bien voir la distinction, considérons le cas d'un passager qui, à son dernier essai, tente d'utiliser la route q. S'il est refusé faute de place sur cette route, alors il est compté dans f_q et non dans k_q.

De la définition des variables, les équations suivantes sont immédiates:

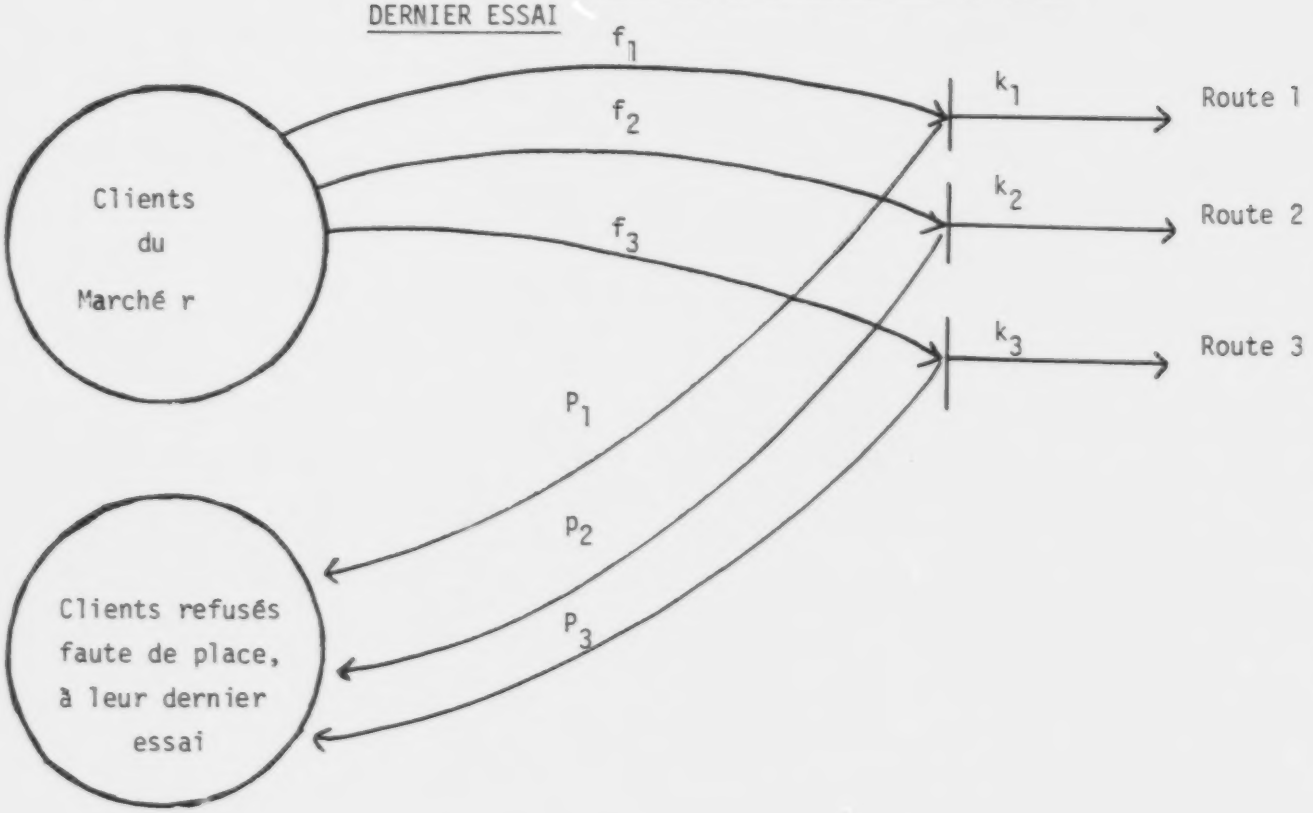
$$\sum_{q \in Q_r} f_q = d_r \qquad (4.1)$$

$$f_q = k_q + P_q(f) \qquad (4.2)$$

La figure 9 illustre le contexte du modèle M1

FIGURE 9

SITUATION OBSERVÉE AU NIVEAU DES ROUTES POUR LE MODÈLE M1, EN CONSIDÉRANT LES PASSAGERS À LEUR DERNIER ESSAI



4.2.2 Calcul du nombre de passagers excédentaires sur un arc

Notation*:

f_a : nombre journalier moyen de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc a

C_a : capacité de l'avion associée à l'arc a

σ_a : écart-type du nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc a

λ_a : taux de variation du nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc a

$E(C_a, f_a, \sigma_a)$: espérance du nombre de passagers excédentaires sur l'arc a; espérance du nombre de passagers qui, à leur dernier essai, sont refusés faute de place sur l'arc a.

Pour calculer le nombre de passagers excédentaires sur un arc en fonction du flot de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser cet arc, l'idée de départ est de considérer le nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser un arc, comme une variable aléatoire.

Hypothèse 1**: Le nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser un arc a, suit une distribution normale de moyenne f_a et d'écart-type σ_a.

Avec cette hypothèse, $E(C_a, f_a, \sigma_a)$ se calcule à l'aide de la définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

---

* Les notations utilisées ici sont les mêmes que celles utilisées dans la formulation du modèle M1 au chapitre 5.

** La validité de cette hypothèse a été discutée dans [7].

$$E(C_a, f_a, \sigma_a) = \int_{C_a}^{\infty} (x - C_a) \quad f_X(x)\, dx \qquad (4.3)$$

où X est la variable aléatoire représentant le nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a et $f_X(x)$ est la fonction de densité de X, une normale $N(f_a, \sigma_a)$.

Remarquons que la définition $E(C_a, f_a, \sigma_a)$, à l'aide de l'équation (4.3), correspond bien à l'espérance du nombre de passagers excédentaires sur l'arc a, comme elle est définie dans le contexte du modèle M1. En effet, par la définition de X, pour $X \geq C_a$, $(X - C_a)$ représente bien le nombre de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc a. Et, pour $X < C_a$, le nombre de ces passagers est bien nul.

Pour en arriver à une expression plus commode à utiliser, ramenons-nous au cas d'une variable standardisée.

Soit,

$$Y = \frac{X - f_a}{\sigma_a} \quad , Y \text{ est } N(0,1)$$

d'où

$$X = \sigma_a Y + f_a$$

Exprimons $f_X(x)$ en fonction de $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} P(X < x)$$

$$= \frac{d}{dx} P(\sigma_a Y + f_a < \sigma_a y + f_a)$$

$$= \frac{d}{dx} P(Y < y)$$

$$= \frac{d}{dy} P(Y < y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$f_X(x) = f_Y(y) \cdot \frac{1}{\sigma_a} \qquad (4.4)$$

Effectuons le changement de variables dans la relation (4.3) et utilisons la relation (4.4)

$$\int_{C_a}^{\infty} \sigma (x - C_a) f_X(x) \, dx$$

$$= \int_{\frac{C_a - f_a}{\sigma_a}}^{\infty} (\sigma_a y + f_a - C_a) \frac{1}{\sigma_a} f_Y(y) \, \sigma_a \, dy$$

$$= \sigma_a \int_{\frac{C_a - f_a}{\sigma_a}}^{\infty} (y - \frac{C_a - f_a}{\sigma_a}) f_Y(y) \, dy$$

$$= \sigma_a E\left(\frac{C_a - f_a}{\sigma_a}, 0, 1\right)$$

D'où

$$E(C_a, f_a, \sigma_a) = \sigma_a E(p, 0, 1) \qquad (4.5)$$

où $p = \frac{C_a - f_a}{\sigma_a}$

Il suffit maintenant d'évaluer E (p, 0, 1).

$$E(p,0,1) = \int_p^\infty (y-p)\, f_Y(y)\, dy$$

$$\int_p^\infty (y-p)\, \tfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

$$\int_p^\infty \tfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, y\, dy - p \int_p^\infty \tfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

$$E(p, 0, 1) = f(p) - p\,(1 - F(p)) \qquad (4.6)$$

où f et F sont les fonctions de densité et de répartition de la loi normale N (0,1).

La combinaison de (4.5) et (4.6) implique:

$$E(C_a, f_a, \sigma_a) = \sigma_a\,(f(p) - p\,[1 - F(p)])$$

$$\text{où} \quad p = \frac{C_a - f_a}{\sigma_a} \qquad (4.7)$$

Définissons maintenant $\lambda_a = \frac{\sigma_a}{f_a}$, le taux de variation du nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc et formulons l'hypothèse suivante sur λ_a :

Hypothèse 2*: λ_a demeure constant pour des valeurs différentes de σ_a et f_a.

Avec l'introduction de la constante λ_a, $\sigma_a = \lambda_a . f_a$ et l'équation (4.7) devient

$$E(C_a, f_a, \lambda_a) = \lambda_a f_a\,(f(p) - p\,[1 - F(p)]) \qquad (4.8)$$

où

$$\frac{C_a - f_a}{\lambda_a\, f_a}$$

* La validité de cette hypothèse a été discutée dans [7]

4.2.3 Calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route

Notation:

f_q : nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser la route q

R_a : ensemble des routes qui utilisent l'arc a

S_q : ensemble des arcs qui composent la route q

$E_a(f_a) = E(C_a, f_a \sigma_a)$: Il s'agit seulement de simplifier la notation en sous-entendant C_a et σ_a

$P_q(f)$: nombre de passagers excédentaires sur la route q; nombre de passagers qui, à leur dernier essai, sont refusés faute de place sur la route q.

Pour calculer le nombre de passagers excédentaires sur une route q en fonction du flot de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser cette route, ramenons-nous au niveau des arcs qui composent la route q.

Comme un arc (avion) est utilisé par des passagers de plusieurs marchés, il faut déterminer la part des passagers excédentaires sur l'arc qui appartient à cette route q. L'hypothèse suivante est utilisée:

Hypothèse 3*: La probabilité d'être refusé faute de place sur un arc (avion) est la même pour tous les passagers voulant l'utiliser, indépendamment du marché d'où ils proviennent.

Cette hypothèse se vérifie si les places sont attribuées dès que demandées et, que les réservations arrivent aléatoirement pour les différentes origines-destinations. Si tel n'est pas le cas, l'hypothèse 3

---

* Les notations utilisées ici sont les mêmes que celles utilisées dans la formulation du modèle M1 au chapitre 5.

devra être modifiée, mais une solution du même type sera probablement encore possible. Ainsi, en supposant que le taux de refus sur un arc (avion) est le même pour tous les passagers qui l'utilisent, le nombre de passagers de la route q refusés sur l'arc a est donné par:

$$\frac{f_q}{f_a} \quad E_a \ (f_a) \quad \text{avec} \quad f_a = \sum_{q \in R_a} f_q$$

Pour obtenir le nombre total de passagers du marché r_q qui sont refusés le long de la route q, nous posons l'hypothèse suivante:

Hypothèse 4: La probabilité qu'un même client soit excédentaire sur plus d'un arc composant une route est faible et peut être négligée.

L'utilisation de cette hypothèse présente relativement peu de risques par rapport aux simplifications qu'elle permet. D'abord, remarquons que les origines-destinations les plus importantes sont desservies par vols directs; l'hypothèse 4 n'est pas utilisée pour ces routes d'un seul arc. De plus, dans le type de solutions recherchées par les compagnies aériennes, la probabilité qu'un passager soit refusé sur un arc est faible. Or, comme la probabilité d'être refusé sur deux arcs est de l'ordre du carré de cette faible probabilité, elle est pratiquement négligeable. Il n'est donc pas nécessaire de considérer l'effet de ces termes pour la solution optimale.

Au cours de la résolution, avant que la solution optimale ne soit atteinte, il se peut que certaines routes soient surchargées. Dans ce

cas, les probabilités d'être refusé sur plusieurs arcs composant une route peuvent être élevées et les termes du second ordre ne peuvent être négligés. En considérant ces termes comme négligeables, nous augmentons le calcul du nombre de passagers excédentaires et, par le fait même, le coût associé à ces routes surchargées. Ainsi, l'algorithme diminue en priorité le flot sur les routes surchargées, ce qui accélère la convergence de l'algorithme.

Avec l'hypothèse 4, le nombre total de passagers d'un marché refusés le long de la route q est donné par la somme des passagers refusés pour chacun des arcs constituant la route:

$$P_q(f) = \sum_{a \in S_q} \frac{f_q}{f_a} E_a(f_a)$$

$$P_q(f) = f_q \sum_{a \in S_q} \frac{E_a(f_a)}{f_a} \qquad (4.9)$$

4.2.4 Approximation du nombre de passagers excédentaires sur un arc

La formule (4.8) est difficilement utilisable sur l'ordinateur, car il n'existe pas d'expression algébrique pour la fonction de répartition de la loi normale. Cette fonction doit être évaluée avec une table. Pour réduire au maximum l'effort de calcul, nous utilisons une équation algébrique relativement simple pour approximer E (p, 0, 1). Cette approximation est définie comme suit:

$$A(p) = \begin{cases} .4 \left(\frac{5 - p}{5} \right)^7 & \text{si } p \leq 5 \\ 0 & \text{si } p > 5 \end{cases} \qquad (4.10)$$

Ainsi, en introduisant l'approximation de E(p, 0, 1) dans l'équation (4.7), on obtient l'approximation suivante pour $E_a(f_a)$:

$$\text{APPROX}_a(f_a) = \begin{cases} .4\lambda_a f_a \left[\frac{5-p}{5}\right]^7 & \text{si} \quad f_a \geq C_a \delta_a \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq f_a < C_a \delta_a \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\text{où} \quad p = \frac{C_a - f_a}{\lambda_a \quad f_a} \quad \text{et} \quad \delta_a = \frac{1}{(5\lambda_a + 1)}$$

Les figures 10 et 11 présentent l'approximation de $E_a(f_a)$ donnée par $\text{APPROX}_a(f_a)$ pour deux exemples différents. La courbe continue représente les valeurs théoriques qui ont été calculées point par point et la courbe en pointillé représente des évaluations de la fonction $\text{APPROX}_a(f_a)$. Les valeurs des paramètres sont les suivantes: pour le premier exemple λ_a =0.2 et C_a = 100 et pour le deuxième, λ_a = 0.3 et C_a = 100. Ces deux seuls exemples nous donnent une bonne idée de la qualité de l'approximation pour toutes les valeurs des paramètres, car en pratique λ_a se situe dans l'intervalle [.2, .3] et il est facile de voir d'après l'expression algébrique de APPROX_a que l'on obtiendra le même graphique à un facteur d'échelle près si on fait varier la capacité C_a. L'examen des deux figures montre que l'approximation surestime le nombre de passagers excédentaires quand $f_a > C_a$ et rend encore plus désavantageuses des solutions qui dépassent la capacité de l'avion. Ceci ne peut qu'accélérer la convergence de l'algorithme vers des solutions acceptables.

FIGURE 10

PASSAGERS EXCEDENTAIRES SUR UN ARC

EN FONCTION DE f_a

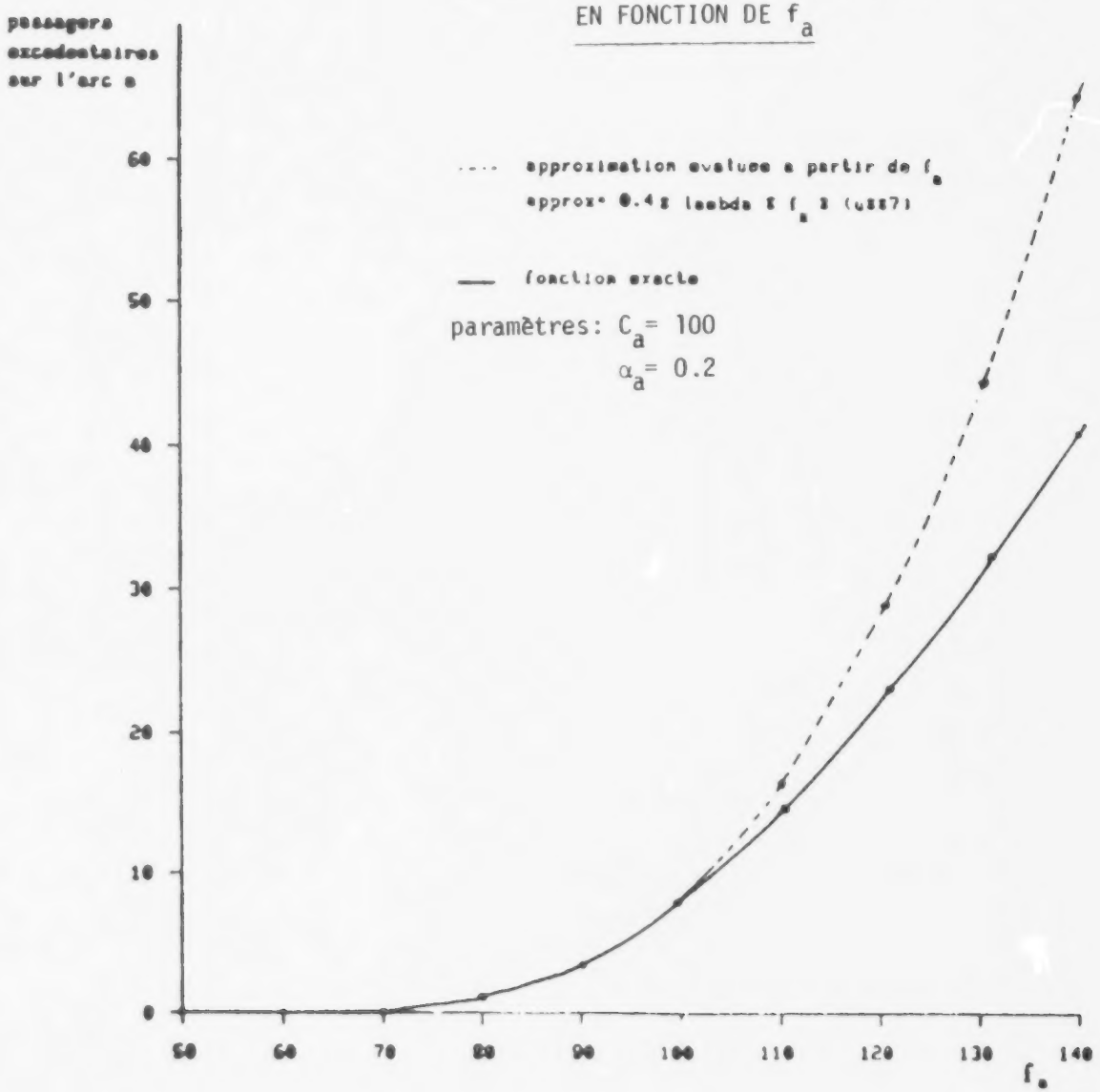
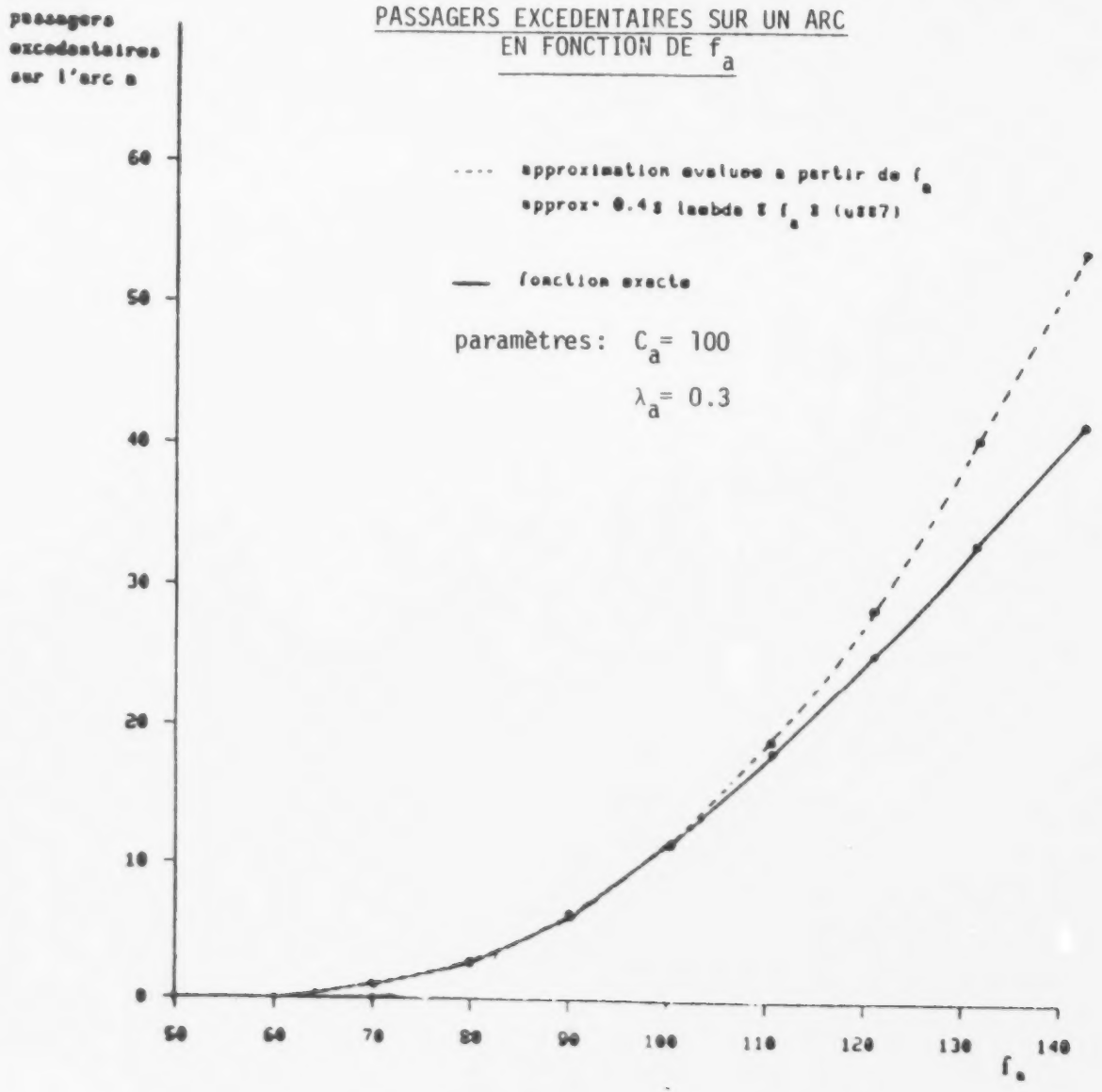


FIGURE 11

PASSAGERS EXCEDENTAIRES SUR UN ARC
EN FONCTION DE f_a



4.3 Calcul du nombre de passagers excédentaires dans le contexte du modèle M2

Même si les contextes des modèles M1 et M2 sont différents, il est possible d'utiliser, dans le contexte du modèle M2, des hypothèses similaires à celles utilisées dans le contexte du modèle M1, pour le calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route. Ainsi, nous pouvons reprendre les développements faits précédemment dans le contexte du modèle M1 et utiliser des résultats déjà énoncés.

Avant de refaire ces développements, nous décrivons le contexte du modèle en précisant la définition des variables et en spécifiant la notion de passagers excédentaires dans ce contexte particulier. La notation utilisée fait ressortir les distinctions et les analogies entre les deux modèles M1 et M2.

4.3.1 Contexte du modèle

Contrairement au modèle M1, les équations du modèle M2 sont établies en tenant compte de tous les essais que fait un passager avant de trouver une place sur une route. Ce modèle considère les passagers lors de leur premier essai, lors de leur deuxième essai s'ils sont refusés faute de place sur la première route choisie,... En effet, les variables utilisées pour établir les équations du modèle à partir d'hypothèses de comportement sont les suivantes:

f_q^T : flot de passagers qui tentent d'utiliser la route q, en comptant tous les essais des passagers

k_q : flot de passagers qui utilisent la route q

Notons que les variables f_q^T n'apparaissent pas dans la formulation finale du modèle M2, mais elles sont utilisées dans les développements faits pour y arriver. Il est bien important de différencier les variables f_q^T et k_q. Pour bien voir la distinction, considérons le cas d'un passager qui tente d'utiliser la route q_1, y est refusé faute de place et, qui utilise ensuite la route q_2. Ce passager est compté dans f_{q_1} et f_{q_2}, mais comme il utilise une seule route, la route q_2, il compte seulement dans k_{q_2}.

Dans le contexte du modèle M2, le nombre de passagers excédentaires sur une route q est donc spécifié comme suit:

$\overline{P}_q^T(k)$: nombre de passagers qui sont refusés faute de place sur la route q, en comptant tous les essais des passagers

Et, la demande est définie comme suit:

d_r^T : nombre total de passagers qui utilisent les routes du marché

Ainsi, la demande associée à un marché dans le contexte M2 ne comprend pas les passagers qui décident de ne plus voyager, après un certain nombre de choix de routes où ils ont été refusés faute de place. Elle compte

seulement les passagers qui ne se découragent pas et qui arrivent à trouver une place sur une des trois routes du marché.

De la définition des variables, les équations suivantes sont immédiates:

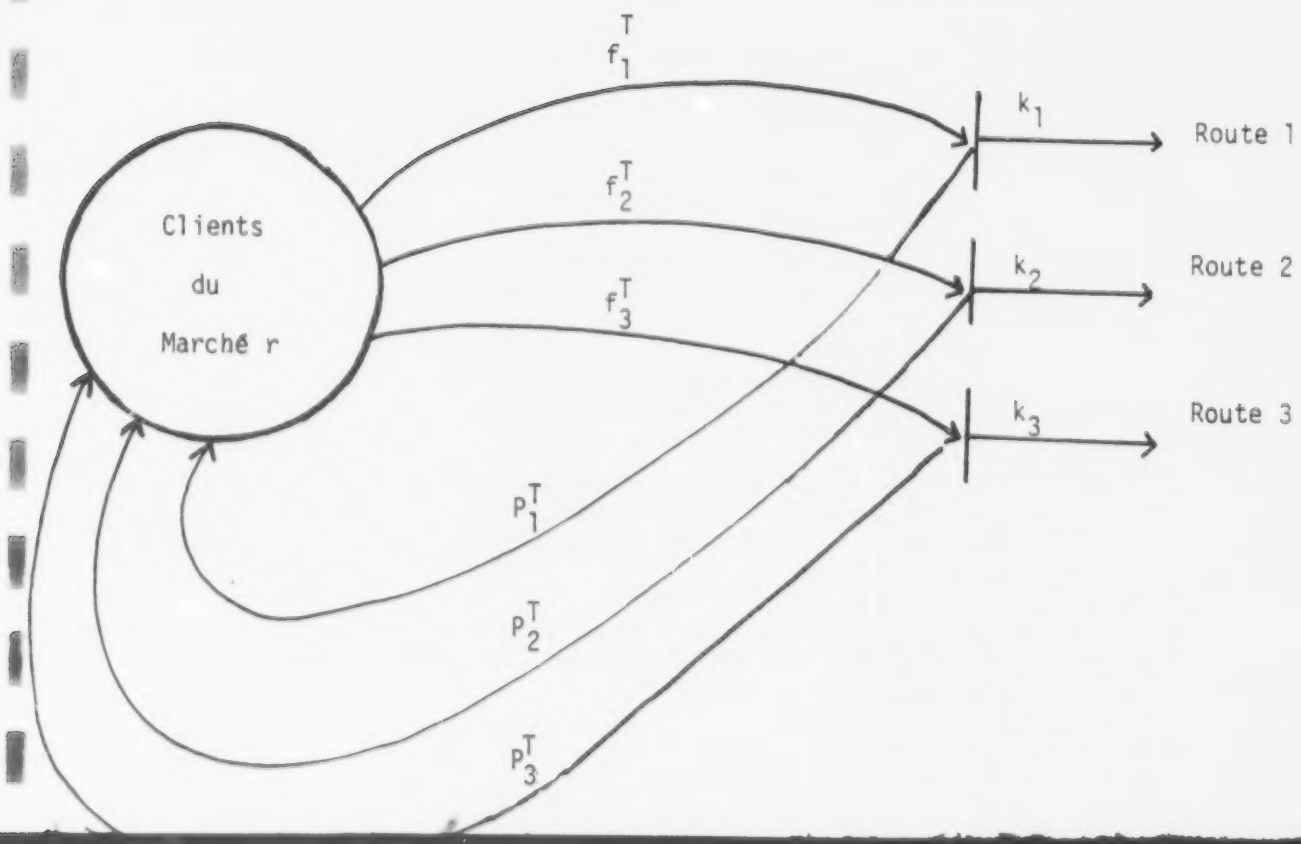
$$\sum_{q \in Q_r} k_q = d_r^T \qquad (4.12)$$

$$f_q^T = k_q + \overline{P}_q^T (k) \qquad (4.13)$$

La figure 12 illustre le contexte du modèle M2.

FIGURE 12

SITUATION OBSERVEE AU NIVEAU DES ROUTES POUR LE MODELE M2, EN COMPTANT TOUS LES ESSAIS DES PASSAGERS



4.3.2 Calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route

Notation *

k_a : nombre journalier de passagers qui utilisent l'arc a

f_a^T : nombre journalier moyen de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers

σ_a^T : écart-type du nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers

λ_a^T : taux de variation du nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers

$E_a^T(f_a^T)$: espérance du nombre de passagers excédentaires sur l'arc a; espérance du nombre de passagers qui sont refusés faute de place sur l'arc a, en comptant tous les essais des passagers

$\bar{E}_a^T(k_a)$: espérance du nombre de passagers excédentaires sur l'arc a défini comme précédemment. Cette nouvelle notation est utilisée pour distinguer l'expression en fonction de f_a^T et l'expression en fonction de k_a.

k_q : nombre journalier moyen de passagers qui utilisent la route q

f_q^T : nombre journalier moyen de passagers qui tentent d'utiliser la route q, en comptant tous les essais des passagers

$P_q^T(f^T)$: nombre de passagers excédentaires sur la route q; nombre de passagers qui ont été refusés faute de place sur la route q, en comptant tous les essais des passagers

$\bar{P}_q^T(k)$: nombre de passagers excédentaires sur la route q, défini comme précédemment. Cette nouvelle notation est utilisée pour distinguer l'expression en fonction de f^T et l'expression en fonction de k.

---

* Les notations utilisées ici sont les mêmes que celles utilisées dans la formulation du modèle M2 au chapitre 6.

Comme précédemment, pour calculer le nombre de passagers excédentaires sur une route, ramenons-nous au niveau des arcs. Considérons le nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers, comme une variable aléatoire et utilisons l'hypothèse suivante (similaire à l'hypothèse 1):

Hypothèse 5 *: Le nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser un arc a, en comptant tous les essais des passagers, suit une distribution normale de moyenne f_a^T et écart-type σ_a^T .

Avec cette hypothèse, $E_a^T(f_a^T)$ se calcule à l'aide de la définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire:

$$E_a^T(f_a^T) = \int_{C_a}^{\infty} (x - C_a)\, f_X(x)\, dx \qquad (4.14)$$

où X est la variable aléatoire représentant le nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers et $f_X(x)$ est la fonction de densité de X, une normale $N(f_a^T, \sigma_a^T)$. Remarquons que la définition de $E_a^T(f_a^T)$ à l'aide de l'équation (4.14) correspond bien à l'espérance du nombre de passagers excédentaires sur l'arc a, comme elle est définie dans le contexte du modèle M2. En effet, par la définition de X, pour $X \geq C_a$, $(X - C_a)$ représente bien le nombre de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a et qui sont refusés de place, en comptant tous les essais des passagers. Et, pour $X < C_a$, le nombre de ces passagers est bien nul.

---

* La validité de cette hypothèse a été discutée dans [7]

Ainsi, en faisant les mêmes changements de variables que nous avons fait précédemment, nous obtenons l'équation suivante:

$$E_a^T (f_a^T) = \sigma_a^T \ (f(p) - p[\,1 - F(p)\,]) \qquad (4.15)$$

où

$$p = \frac{C_a - f_a^T}{\sigma_a^T}$$

et en introduisant la constante $\lambda_a^T = \dfrac{\sigma_a^T}{f_a^T}$, cette équation devient

$$E_a^T (f_a^T) = \lambda_a^T f_a^T (f(p) - p[\,1 - F(p)\,]) \qquad (4.16)$$

où

$$p = \frac{C_a - f_a^T}{\lambda_a^T \ f_a^T}$$

Maintenant, pour définir le nombre de passagers excédentaires sur une route, $P_q^T (f^T)$, il suffit de refaire les mêmes développements que dans le contexte du modèle M1, pour obtenir l'équation suivante:

$$P_q^T (f^T) = f_q^T \sum_{a \in S_q} \frac{E_a (f_a^T)}{f_a^T} \qquad (4.17)$$

Bien que les variables f_q^T seront utilisées au chapitre 6 pour le développement des équations du modèle M2, ce sont les variables k_q qui apparaissent dans la formulation du modèle. Ainsi, pour le modèle M2, il nous faut une expression pour le calcul du nombre de passagers excédentaires sur une route, qui dépend seulement des variables k_q. Voyons

comment exprimer P_q^T comme fonction de k, à partir de sa définition en fonction de f^T donnée en (4.17). Pour éviter les confusions, nous notons $\overline{P}_q^T(k)$ l'expression de P_q^T comme fonction de k et, $\overline{E}_a^T(k_a)$ l'expression de E_a^T comme fonction de k_a.

De la définition des variables, découle directement les relations suivantes:

$$f_q^T = k_q + \overline{P}_q^T(k) \tag{4.18}$$

et

$$f_a^T = k_a + \overline{E}_a^T(k_a) \tag{4.19}$$

En introduisant ces deux égalités dans l'équation (4.17), nous obtenons l'équation suivante:

$$\overline{P}_q^T(k) = (k_q + \overline{P}_q^T(k)) \sum_{a \in S_q} \frac{\overline{E}_a^T(k_a)}{(k_a + \overline{E}_a^T(k_a))} \tag{4.20}$$

Et, en isolant $\overline{P}_q^T(k)$, nous trouvons:

$$\overline{P}_q^T(k) = k_q \frac{\sum_{a \in S_q} (\overline{E}_a^T(k_a) / (k_a + \overline{E}_a^T(k_a)))}{1 - \sum_{a \in S_q} (\overline{E}_a^T(k_a) / (k_a + \overline{E}_a^T(k_a)))} \tag{4.21}$$

Ainsi, le problème d'évaluer $\overline{P}_q^T(k)$ se réduit à évaluer $\overline{E}_a^T(k_a)$. A la section suivante, nous définissons une approximation pour $\overline{E}_a^T(k_a)$.

4.3.3 Approximation du nombre de passagers excédentaires sur un arc

Pour utiliser l'équation (4.21) qui nous donne $\overline{P}_q^T(k)$, le nombre de passagers excédentaires sur la route q exprimé en fonction des variables k_q, il nous faut évaluer $\overline{E}_a^T(k_a)$, l'espérance de passagers excédentaires sur l'arc a exprimé en fonction de la variable k_a. L'équation (4.16) développée à la section précédente évalue de façon exacte la fonction $E_a^T(f_a^T)$. Comme nous ne connaissons pas d'équations évaluant de façon exacte $\overline{E}_a^T(k_a)$, utilisons l'équation (4.16) pour approximer $\overline{E}_a^T(k_a)$.

Rappelons l'équation (4.16)

$$E_a^T(f_a^T) = \lambda_a^T f_a^T (f(p) - p[1 - F(p)])$$

où

$$p = \frac{C_a - f_a^T}{\lambda_a^T f_a^T}$$

Nous avons vu à la section 4.2.4 que cette fonction peut être approximée par l'équation algébrique suivante:

$$\text{APPROX}_a^T(f_a^T) = \begin{cases} .4\,\lambda_a f_a^T \left(\dfrac{5-p}{5}\right)^7 & \text{si } f_a^T \geq C_a\delta_a \\ 0 & \text{si } 0 \leq f_a^T < C_a\delta_a \end{cases} \qquad (4.22)$$

où $p = \dfrac{C_a - f_a^T}{\lambda_a^T f_a^T}$ et $\delta_a = \dfrac{1}{(5\lambda_a^T + 1)}$

Pour définir une approximation de $\overline{E}_a^T(k_a)$, on pourrait penser d'utiliser la relation (4.19), $f_a = k_a + \overline{E}_a^T(k_a)$ en substituant $(k_a + \overline{E}_a^T(k_a))$ à f_a dans l'équation (4.22) et isoler par la suite $\overline{E}_a^T(k_a)$. Malheureusement, cela n'est pas possible, car il faudrait résoudre une équation de degré 7 pour isoler $\overline{E}_a^T(k_a)$.

A défaut de pouvoir utiliser cette méthode, une approximation de $\overline{E}_a^T(k_a)$ peut être obtenue en évaluant, au point K_a, la fonction $APPROX_a^T$ et en la multipliant par un facteur de correction qui varie avec k_a. L'équation suivante donne cette approximation et la forme du facteur de correction

$$APP_a(k_a) = APPROX_a^T(k_a) \cdot CORR_a(k_a) \qquad (4.23)$$

où

$$CORR_a(k_a) = \left(\frac{C_a(1 - \delta_a)}{C_a - k_a} \right)^{\alpha}$$

avec $\alpha = 1/2$

et $\delta_a = \dfrac{1}{5\lambda_a^T + 1}$

Remarques sur le comportement du facteur $CORR_a$:

(1) $k_a \in [o, C_a]$ contrairement à $f_a \in [o, \infty]$. Cela nous assure que $CORR_a$ demeure positif quel que soit la valeur de k_a.

(2) Lorsque $k_a < \delta_a C_a$, la fonction $APP(k_a)$ prend la valeur o, donc pour $k_a < \delta_a C_a$, le facteur $CORR_a(k_a)$ n'a pas d'effet.

(3) $CORR_a(k_a)$ prend la valeur 1 pour $k_a = \delta_a C_a$ et augmente avec k_a lorsque $k_a > \delta_a C_a$

(4) $CORR_a(k_a)$ a une assymptote au point $k_a = C_a$

$$\lim_{k_a \to C_a} CORR_a(k_a) = \infty$$

Plus k_a s'approche de C_a, plus le facteur de correction devient important.

A partir de ces remarques sur le comportement du facteur de correction $CORR_a(k_a)$, nous pouvons justifier plus facilement le choix de ce facteur. Comme $APP_a(k_a)$ se veut une approximation de $\bar{E}_a^T(k_a)$, elle doit vérifier des propriétés importantes de cette fonction. Par exemple, nous savons que $\bar{E}_a^T(k_a)$ augmente avec k_a et tend vers l'infini lorsque k_a tend vers C_a. Comme nous le montre la remarque (4), le facteur de correction $CORR_a(k_a)$ nous assure que la fonction $APP_a(k_a)$ tend vers l'infini lorsque k_a tend vers C_a.

Nous savons aussi que pour des petites valeurs de k_a et f_a, $\bar{E}_a^T(k_a)$ et $E_a^T(f_a^T)$ prennent sensiblement les mêmes valeurs. En effet, sur des arcs non-congestionnés (c.-a.-d. k_a et f_a^T sont petits), les variables k_a et f_a^T se confondent, car peu de gens sont refusés faute de place et alors $\bar{E}_a^T(k_a)$ et $E_a^T(f_a^T)$ prennent des valeurs très voisines. Nous reportant aux remarques (2) et (3), nous voyons que le facteur de correction $CORR_a(k_a)$ traduit bien cette propriété. Il a peu d'effet pour de

petites valeurs de k_a et il prend de plus en plus d'importance à mesure que k_a augmente.

Le paramètre α a été calibré de telle sorte que notre approximation donne de bons résultats pour une valeur de λ_a dans l'intervalle [2.3], car en général λ_a varie dans cet intervalle. Les figures 13 et 14 montrent la qualité de l'approximation pour les valeurs des paramètres λ_a=0.2 avec C_a= 100 puis, λ_a= 0.3 avec C_a= 100. Il n'est pas nécessaire d'étudier le comportement de l'approximation pour d'autres valeurs de la capacité C_a, car en faisant varier C_a, nous obtenons le même graphique à un facteur d'échelle près.

Il peut paraître étrange de retrouver sur les graphiques une courbe correspondant à la fonction exacte $\overline{E}_a^T(k_a)$, car nous avons seulement défini la fonction exacte $E_a^T(f_a^T)$. Voyons comment nous pouvons tracer cette courbe. A partir d'une valeur de f_a^T, nous calculons $k_a(f_a^T)$ associé à l'aide de la relation $f_a^T = k_a + E_a^T(f_a^T)$ et comme $\overline{E}_a^T(k_a(f_a^T)) \quad E_a^T(f_a^T)$, alors nous disposons d'un couple $(k_a(f_a^T), \overline{E}_a^T(k_a(f_a^T)))$ de points du graphe de $\overline{E}_a^T(k_a)$. En faisant varier f_a, nous obtenons tous les points nécessaires pour tracer le graphe de la fonction $\overline{E}_a^T(k_a)$.

FIGURE 13

PASSAGERS EXCEDENTAIRES SUR UN ARC
EN FONCTION DE k_a

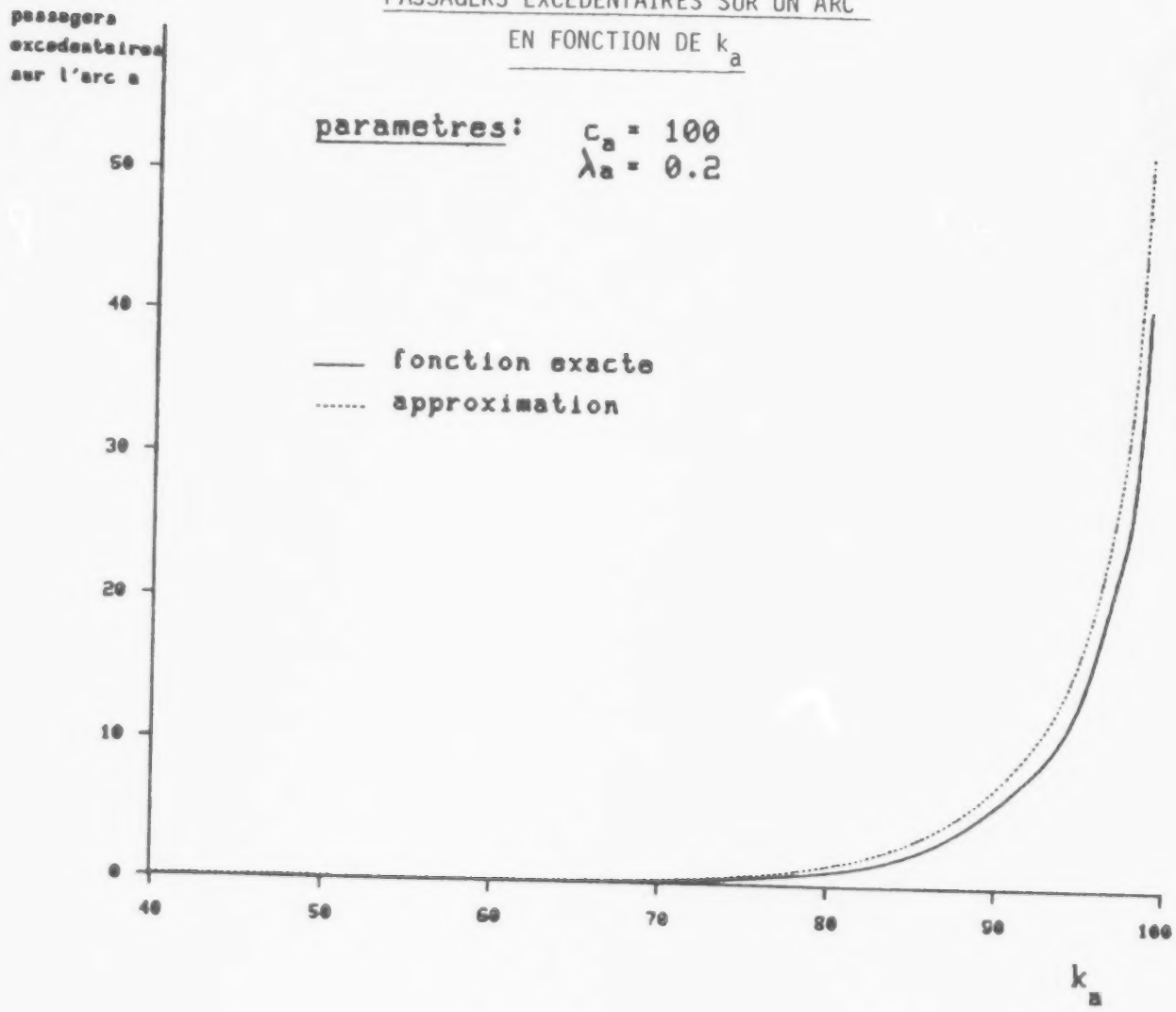
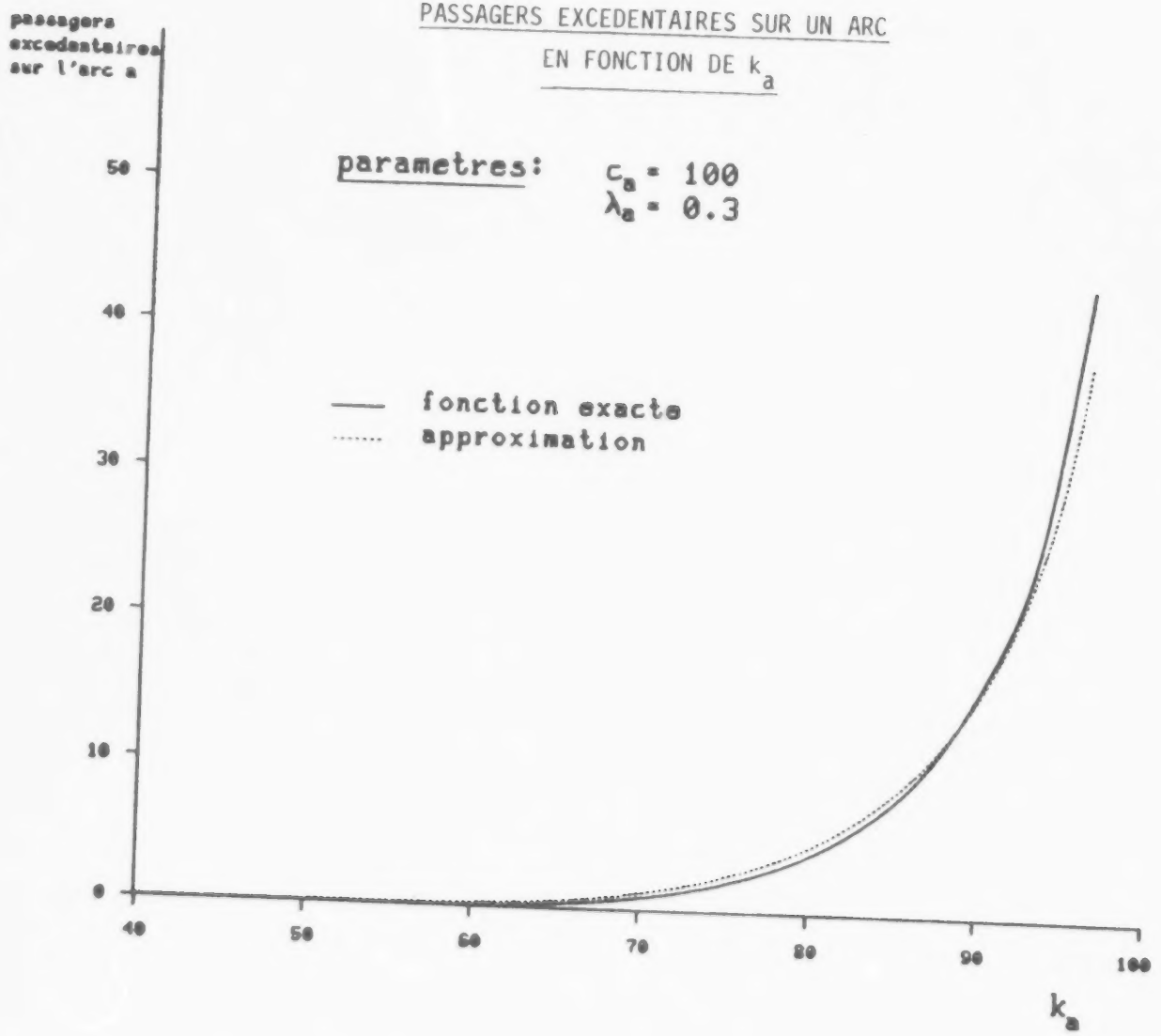


FIGURE 14

PASSAGERS EXCEDENTAIRES SUR UN ARC

EN FONCTION DE k_a



4.3.4 Prolongement de la fonction calculant le nombre de passagers excédentaires sur une route, pour une assignation des passagers sur les routes à l'extérieur du domaine de la fonction

Nous avons défini une équation pour $\overline{P}_q^T(k)$, équation (4.21) et aussi une approximation pour $\overline{E}_a^T(k_a)$, équation (4.23). En introduisant (4.23) dans (4.21), nous obtenons évidemment une approximation pour $\overline{P}_q^T(k)$. Notons cette approximation $PEX_q(k)$.

L'approximation $PEX_q(K)$ se comporte en autant que les variables k_q représentant le flot de passagers qui utilisent une route ne produisent pas des flots de passagers sur les arcs, k_a qui dépassent la capacité. Du point de vue théorique, k_a devrait varier seulement dans l'intervalle $[o, C_a]$. D'ailleurs, la fonction $\overline{E}_a^T(k_a)$ et son approximation $APP_a^T(k_a)$ présentent une assymptote au point $k_a = C_a$ et ne sont pas définies pour des valeurs de k_a dépassant la capacité C_a.

Cependant, dans la résolution du modèle M2, où est utilisée cette approximation, nous permettons aux variables k_q d'atteindre des valeurs produisant des flots sur les arcs qui dépassent la capacité. Cela nous oblige donc à prolonger l'approximation $PEX_q(k)$ de façon à permettre au modèle d'évaluer une mesure de passagers excédentaires pour de telles solutions.

Soit k, l'assignation des passagers pour laquelle on veut évaluer $\overline{P}_q^T(k)$. Définissons:

$$\nabla^* = \max_{a \in S_q} (k_a - \delta C_a) \qquad \text{avec } \delta = 99\% \tag{4.24}$$

$$\text{et} \quad k_q^0 = k_q - \nabla^* \tag{4.25}$$

Pour une valeur de K_q^0 positive, k_q^0 représente la valeur maximale du flot qu'il est possible d'assigner à la route q en ne dépassant pas la borne δC_a sur tous les arcs qui composent la route. Si k_q^0 prend une valeur négative, alors le flot k_a dépasse la borne δC_a sur au moins un des arcs avant même que ne soit introduit du flot sur la route q. Nous utilisons δC_a plutôt que C_a comme borne sur k_a, car la fonction $APP_a(k_a)$ utilisée au niveau des arcs ne peut être évaluée au point $k_a = C_a$ puisqu'elle y présente une assymptote.

Définissons maintenant l'approximation suivante pour $\overline{P}_q^T(k)$, considérant les deux cas possibles $k_q^0 \geq 0$ et $k_q^0 < 0$:

$$APEX_q(k) = \begin{cases} F^1(k) & \text{si} \quad k_q^0 \geq 0 \\ F^2(k) & \text{si} \quad k_q^0 < 0 \end{cases} \qquad (4.26)$$

où

$$F^1(k) = \begin{cases} PEX_q(k) & \text{si } k_q \leq k_q^0 \\ PEX_q(k^0) + \dfrac{\partial PEX(k^0)}{\partial k_q}(k_q - k_q^0) & \text{si } k_q > k_q^0 \end{cases}$$

et

$F^2(k) = Mk_q$ (M est une constante choisie suffisamment grande)

Cette nouvelle approximation est en fait un prolongement linéaire de la fonction $PEX_q(k)$. Elle permet au modèle de dépasser la capacité sur certains arcs et cela est un avantage en pratique. Si l'hypothèse

qu'il y ait suffisamment de place pour que tous les passagers puissent voyager n'était pas réalisée, le modèle théorique serait insoluble. Avec cette approximation, le problème reste soluble même si la capacité est dépassée sur certains arcs. Une telle solution indiquera que pour certains marchés, il n'y a pas suffisamment de place. Le reste de la solution sera valable et ainsi nous aurons toute l'information pertinente pour modifier cet horaire insatisfaisant.

CHAPITRE CINQUIÈME

MODELE M1: PROBLEME DE PROGRAMMATION NON-LINEAIRE

Rappelons que le problème est de déterminer comment le flot de passagers se déplace des origines aux destinations en tenant compte de l'attraction des routes pour les passagers et de la limite de capacité des avions. Nous attaquons le problème en définissant un premier modèle qui s'inscrit dans les modèles de programmation non-linéaire. La fonction économique à minimiser comprend deux termes: le premier, relié la limite de capacité des avions et le second, à l'attraction des routes pour les passagers. Le modèle répartit les passagers entre les routes de façon à minimiser à la fois la perte de revenu associée aux passagers refusés faute de place et l'insatisfaction découlant de l'utilisation de routes non-attrayantes.

Définissons:

Z_1 : espérance du revenu perdu en refusant des passagers faute de place

Z_2 : coût associé à l'utilisation de routes non-attrayantes.

Alors le problème se résume comme suit:

Minimiser $Z_1 + K Z_2$

s.a.: La demande par chaque marché est répartie entre les routes assurant la liaison.

Dans le présent chapitre, nous développons les équations définissant les termes Z_1 et Z_2 en fonction des flots de passagers désirant utiliser les différentes routes. Nous présentons aussi la méthode de résolution du problème global.

5.1 Notations

Nous introduisons d'abord des notations permettant de simplifier le développement des équations. Nous présentons ensuite les notations utilisées pour les variables et constantes du modèle et nous terminons en rappelant les fonctions qui ont été définies dans les chapitres précédents et,qui seront utilisées dans la formulation du modèle:

- r : indice associé à un marché
- q : indice d'une route (elle est composée d'un arc d'accès et d'une chaîne utilisable dans le réseau)
- r_q : indice du marché desservi par la route q (l'arc d'accès de la route q part de ce marché)
- Q_r : ensemble des routes pour le marché r (les ensembles Q_r sont disjoints à cause des arcs d'accès
- $Q=\bigcup_r Q_r$: ensemble de toutes les routes
- a : indice d'un arc de vol (cet arc peut appartenir à plusieurs routes)
- R_a : ensemble des routes utilisant l'arc a
- S_q : ensemble des arcs utilisés par la route q
- o-d : indice d'une paire origine-destination
- T_{o-d} : ensemble des marchés associés à la paire o-d.

---

f_q : nombre journalier moyen de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser la route q

f_a : nombre journalier moyen de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc a

C_a : capacité de l'avion associée à l'arc a

σ_a : écart-type du nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc a

λ_a : taux de variation du nombre journalier de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser l'arc a

d_r : demande associée au marché r. Elle représente le nombre total de passagers qui, à leur dernier essai, tentent d'utiliser les trois routes du marché r

B^{o-d} : coût du billet pour se déplacer de l'origine à la destination pour la paire o-d.

CI_q : coefficient d'insatisfaction de la route q pour les passagers du marché r_q

$P_q(f)$: nombre de passagers excédentaires sur la route q; nombre de passagers qui, à leur dernier essai, sont refusés faute de place sur la route q

$E_a(f_a)$: espérance du nombre de passagers excédentaires sur l'arc a; espérance du nombre de passagers qui, à leur dernier essai, sont refusés faute de place sur l'arc a.

5.2 Espérance du revenu perdu en refusant des passagers faute de place

A la section 4.2, nous avons établi l'équation (4.9) qui évalue, à partir des variables f_q, le nombre de passagers excédentaires sur la route q :

$$P_q(f) = f_q \sum_{a \in S_q} \frac{E_a(f_a)}{f_a}$$

De plus, nous avons défini une approximation pour $E_a(f_a)$. Celle-ci est donnée par l'équation (4.11). Comme nous l'avons déjà expliqué, nous utilisons cette approximation pour le calcul de $E_a(f_a)$, car l'équation exacte s'utilise difficilement sur l'ordinateur.

Ainsi, nous pouvons définir le nombre de passagers excédentaires sur l'ensemble des routes d'une origine-destination par:

$$\sum_{r \in T_{o-d}} \sum_{q \in Q_r} f_q \sum_{a \in S_q} \frac{E_a(f_a)}{f_a}$$

Et, en multipliant par B^{o-d} le coût du billet associé à la paire o-d, nous obtenons l'espérance du revenu perdu en refusant des passagers faute deplace pour l'ensemble des routes de l'o-d:

$$B^{o-d} \sum_{r \in T_{o-d}} \sum_{q \in Q_r} f_q \sum_{a \in S_q} \frac{E_a(f_a)}{f_a}$$

L'espérance du revenu perdu pour l'ensemble du réseau s'obtient finalement en faisant la somme sur toutes les o-d:

$$Z_1 = \sum_{o-d} B^{o-d} \sum_{r \in T_{o-d}} \sum_{q \in Q_r} f_q \sum_{a \in S_q} \frac{E_a(f_a)}{f_a} \qquad (5.1)$$

5.3 Coût associé à l'utilisation de routes non-attrayantes

Nous avons défini à la section 3.2 des coefficients CI_q, coefficients d'insatisfaction de la route q pour un usager du marché r_q. Transformons maintenant cette mesure d'insatisfaction en coût.

Pour cela, considérons M^{o-d} le niveau d'insatisfaction maximum au-delà duquel les passagers voulant se déplacer d'une origine à une destination décident de ne plus voyager. En pratique, nous calculons le niveau M^{o-d} à partir de la distance de l'origine à la destination en supposant que M^{o-d} augmente linéairement avec la distance. Cette hypothèse est plausible, car plus la distance entre l'origine et la destination est petite, plus les possibilités de transport (taxi, auto, train, autres transporteurs aériens...) sont nombreuses pour l'usager. Ainsi, pour les courtes distances, l'usager devient plus exigeant dans son choix et par le fait même, son niveau d'insatisfaction maximum prend une plus petite valeur.

Définissons G^{o-d} le facteur de conversion de l'insatisfaction en coût à l'aide de la relation suivante:

$$G^{o-d} M^{o-d} = B^{o-d} \qquad (5.2)$$

Le coût associé à l'utilisation de la route q, pour un passager du marché r_q, s'écrit alors $G^{o-d} CI_q$ et le coût total associé à l'insatisfaction de tous les passagers utilisant la route q est donné par:

$$f_q \; G^{o-d} \; CI_q$$

Finalement, en sommant sur l'ensemble de toutes les routes, nous obtenons le coût pour tout le réseau

$$Z_2 = \sum_{o-d} G^{o-d} \sum_{r \in T_{o-d}} \sum_{q \in Q_r} f_q \, CI_q \qquad (5.3)$$

Cette définition de Z_2 calibre relativement bien les coûts de l'insatisfaction des routes de différentes origines-destinations, l'une par rapport à l'autre. Pour calibrer les coûts de l'inattraction relativement aux coûts des passagers excédentaires, nous utilisons la constante K dans l'objectif.

5.4 Équations du modèle

Nous avons maintenant tous les éléments pour formuler les équations du modèle M1.

MODÈLE M1:

Minimiser

$$\sum_{o\text{-}d} B^{o\text{-}d} \sum_{r \in T_{o\text{-}d}} \sum_{q \in Q_r} f_q \sum_{a \in S_q} \frac{E_a(f_a)}{f_a}$$

$$+ K \sum_{o\text{-}d} G^{o\text{-}d} \sum_{r \in T_{o\text{-}d}} \sum_{q \in Q_r} f_q \, CI_q$$

s.a.

$$\sum_{q \in Q_r} f_q = d_r \quad (\forall r)$$

$$f_q \geq 0 \quad (\forall\, q \in Q_r) \quad (\forall r) \qquad (5.4)$$

Rappelons que $E_a(f_a)$ a été approximé par l'équation (4.11) et CI_q a été défini à la section 3.2.

Pour simplifier l'écriture, écrivons ce modèle avec la notation suivante:

Minimiser $v(f)$

s.a.

$$\sum_{q \in Q_r} f_q = d_r \quad (\forall r)$$

$$f_q \geq 0 \quad (\forall q \in Q_r)\ (\forall r) \qquad (5.5)$$

Les équations de Kuhn-Fucker pour les problèmes ayant une telle structure sont:

$$\frac{\partial v}{\partial f_q} \begin{cases} = u_r & \text{si} \quad f_q > 0 \\ \geq u_r & \text{si} \quad f_q = 0 \end{cases} \quad (\forall q \in Q_r)$$

$$\sum_{q \in Q_r} f_q = d_r \quad (\forall r)$$

$$f_q \geq 0 \quad (\forall q \in Q_r)\ (\forall r) \qquad (5.6)$$

Ce système d'équations non-linéaire représente donc une formulation équivalente du modèle M1. Le but visé en présentant cette formulation pour le modèle M1 est de faire ressortir l'analogie entre ce modèle et le modèle M2 décrit au prochain chapitre.

5.5 Méthode de résolution pour le problème global

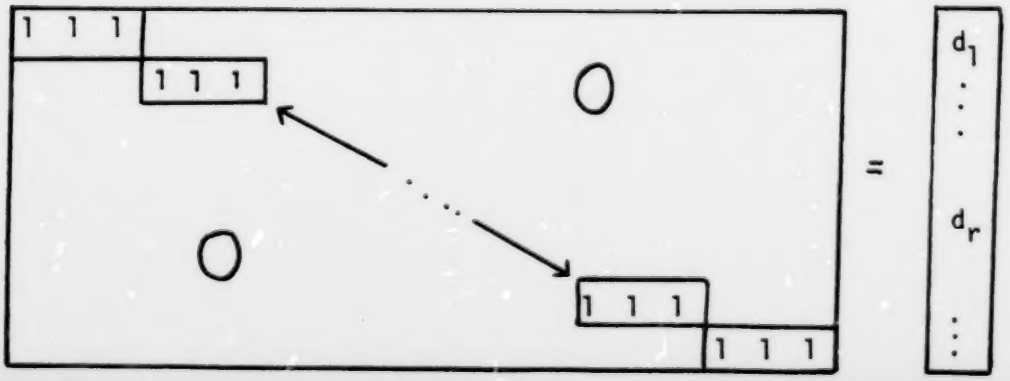
Avant de présenter la méthode de résolution du problème (5.4), discutons l'existence et l'unicité de la solution optimale.

L'existence d'une solution ne pose pas de problème. En effet, le domaine réalisable est non vide et compact, étant fermé et borné , donc la fonction f atteint son minimum sur cet ensemble.

Pour l'unicité, considérons le résultat bien connu que, pour une fonction convexe, le point minimum est unique. La composante de l'objectif associé à l'utilisation de routes non-attrayantes est une fonction linéaire donc convexe. Par contre, l'autre composante de l'objectif qui est associée à la limite de capacité des avions peut être non-convexe dans certains cas. Cependant, d'après les tests que nous avons faits, les problèmes réels sont probablement convexes et même strictement convexes.

Présentons maintenant la méthode de résolution. Le problème (5.4) est de grande taille mais il possède une structure qui permet de le résoudre facilement par une méthode de décomposition.

La matrice des contraintes présente une structure de blocs diagonaux telle que représenté ici:



Les variables de deux marchés différents ne sont pas reliées au niveau des contraintes. L'intéraction entre ces variables, dans le cas de routes utilisant un même arc, s'effectue seulement au niveau de la fonction économique.

Le problème est résolu par décomposition en sous-problèmes correspondant à chaque marché. L'ensemble des marcchés est parcouru de façon cyclique et, un à un, les sous-problèmes sont réoptimisés en maintenant fixes les variables des autres marchés. Lorsque l'on parcourt tous les sous-problèmes sans pouvoir améliorer leur fonction objective, alors la solution est optimale.

Introduisons la notation nécessaire pour préciser la procédure. Soit l'affectation $f_{Q_r} = (f_{q_1}, f_{q_2} \ldots f_{q_n})$ où $(q_1, q_2 \ldots q_n)$ est l'ensemble des routes desservant le marché r. Cette affectation est dite réalisable si elle satisfait les contraintes du système (5.4).

Soit, S_r la fonction qui correspond à la réoptimisation du sous-problème du marché r, en maintenant fixes les variables des autres marchés:

$$S_r(\bar{f}_{Q_1}, \ldots, \bar{f}_{Q_{r-1}}, f_{Q_r}, \bar{f}_{Q_{r+1}}, \ldots, \bar{f}_{Q_m}) \rightarrow (\bar{f}_{Q_1}, \ldots, \bar{f}_{Q_{r-1}}, f^*_{Q_r}, \bar{f}_{Q_{r+1}}, \ldots, \bar{f}_{Q_m})$$

où m est le nombre de marchés. La notation $\bar{f}_{Q_i}$ spécifie que les variables associées au marché Q_i ont une valeur fixe. Et $f^*_{Q_r}$ représente la solution optimale du sous-problème r, les variables des autres marchés étant fixées.

Soit $S = S_m \circ S_{m-1} \circ \ldots \circ S_1$.

Cette fonction correspond à la réoptimisation successive de chacun des sous-problèmes.

L'algorithme de résolution consiste à débuter avec f^0 une solution réalisable et à itérer la fonction S en définissant:

$$f^{k+1} = S(f^k)$$

La convergence de cette procédure de décomposition pour le problème d'optimisation (5.4) a été démontrée par F. Soumis [7]. La preuve se réfère au résultat suivant de Zangwill: "Si S est une application fermée et génère à partir d'un f^0 une suite diminuant la valeur de la fonction économique à chaque itération, alors tout point d'accumulation de cette suite est une solution optimale".

Notons qu'en pratique, les sous-problèmes sont résolus seulement à ε près, car leur résolution exacte demande un nombre infini d'itérations. La convergence de la méthode de décomposition dans ce contexte a aussi été étudié par F. Soumis [7].

Pour compléter la résolution du problème (5.4), il nous faut considérer la résolution du sous-problème associé à un marché. En effet, la résolution du problème (5.4) par décomposition nous demande de résoudre une suite de sous-problème qui ont la forme suivante:

Minimiser

$$v\ (\bar{f}_{Q_1},\ldots,\bar{f}_{Q_{r-1}},\ f_{Q_r},\ \bar{f}_{Q_{r+1}},\ldots,\bar{f}_{Q_m})$$

s.a.

$$\sum_{q \in Qr} f_q = d_r$$

$$f_q \geq 0 \quad (\forall q \in Q_r) \qquad (5.7)$$

La méthode utilisée pour résoudre ce sous-problème est présentée au chapitre 7.

CHAPITRE SIXIEME

MODELE M2: SYSTEME D'EQUATIONS NON-LINEAIRES

Dans le cas du modèle précédent, pour déterminer la répartition de la demande sur les différents vols offerts, nous avons postulé à priori une structure de modèle mathématique et avons introduit certains paramètres à pondérer par la suite pour approcher la réalité. Contrairement à cela, pour définir le modèle M2, nous partirons d'hypothèses décrivant le comportement des passagers dans le processus du choix de route et nous trouverons les équations caractérisant la situation résultante.

Le choix des routes par les passagers résulte d'un processus de décision plus ou moins contraint suivant la congestion du réseau. On peut décrire ce processus en trois étapes. Premièrement, les clients font un premier choix de route en fonction seulement de leur préférence, sans tenir compte de la disponibilité des routes, Deuxièmement, certains de ces passagers utilisent la route choisie, tandis que d'autres sont refusés faute de place. Dans une troisième étape, ces derniers font un choix de route alternative.

Dans ce chapitre, nous établissons d'abord les équations du modèle en énonçant chacune des hypothèses utilisées pour décrire le comportement des passagers à travers ces trois étapes du processus de décision. Nous présentons ensuite la méthode employée pour résoudre ce système d'équations non-linéaires.

6.1 Notations

Nous présentons d'abord les notations permettant de simplifier les équations du modèle. Viennent ensuite les notations utilisées pour décrire les variables et constantes du modèle. Nous terminons en rappelant les fonctions qui ont été définies précédemment et qui sont utilisées dans la formulation du modèle.

r : indice associé à un marché

q : indice d'une route

r_q : indice du marché desservi par la route q

Q_r : ensemble des routes pour le marché r

$Q = \cup_r Q_r$: ensemble de toutes les routes

a : indice d'un arc de vol

R_a : ensemble des routes utilisant l'arc a

S_q : ensemble des arcs utilisés par la route q

---

k_q : nombre journalier moyen de passagers qui utilisent la route q

f^T_q : nombre journalier moyen de passagers qui tentent d'utiliser la route q, en comptant tous les essais des passagers

k_a : nombre journalier moyen de passagers qui utilisent l'arc a

f^T_a : nombre journalier moyen de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers

σ_a^T : écart-type du nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers

λ_a^T : taux de vraiation du nombre journalier de passagers qui tentent d'utiliser l'arc a, en comptant tous les essais des passagers

C_a : capacité de l'avion associée à l'arc a

d_r^T : demande associée au marché r. Elle représente le nombre total de passagers qui utilisent les trois routes du marché r.

A_q : coefficient d'attraction de la route q pour les passagers du marché r_q

$\bar{P}_q^T(k)$: nombre de passagers excédentaires sur la route q; nombre de passagers qui ont été refusés faute de place sur la route q, en comptant tous les essais des passagers

$\bar{E}_a^T(k_a)$: espérance du nombre de passagers excédentaires sur l'arc a; espérance du nombre de passagers qui ont été refusés faute de place sur l'arc a, en comptant tous les essais des passagers.

6.2 Comportement des passagers dans le processus du choix de route, traduit sous forme d'équations

Contrairement au modèle précédent, ce modèle considère le comportement des passagers à leur premier choix, à leur deuxième choix, s'ils sont refusés faute de place sur la première route choisie, et à leur troisième choix, s'ils sont refusés faute de place sur la deuxième route choisie. De plus, il suppose que tous les passagers d'un marché trouvent

place sur une des trois routes du marché, c'est-à-dire que les passagers ne font pas plus de trois essais avant de trouver une place sur une route. Avant de considérer le comportement des passagers face à ces choix de routes, établissons quelques relations.

Rappelons d'abord quelques relations découlant directement de la définition des variables:

$$k_q \geq 0 \tag{6.1}$$

$$f_q^T = k_q + \bar{P}_q^T(k) \tag{6.2}$$

$$\sum_{q \in Q_r} k_q = d_r^T \tag{6.3}$$

$$\sum_{q \in Q_r} f_q^T \geq d_r^T \tag{6.4}$$

Notons qu'une approximation pour $\bar{P}_q^T(k)$ a été développé à la section (4.3). Celle-ci est donnée à l'équation (4.26).

A la section 3.3, nous avons défini un coefficient d'attraction A_q représentant l'attraction relative de la route q pour les passagers du marché r_q. Par la définition de A_q, la relation suivante qui relie les coefficients d'un même marché est immédiate:

$$\sum_{q \in Q_r} A_q = 1 \tag{6.5}$$

De plus, comme les routes d'un marché correspondent aux chaînes utilisables* par les passagers, tous ces coefficients d'attraction A_q doivent non nuls: $A_q > 0 \quad (\forall q \in Q_r)$

---

* La notion de chaîne utilisable a été introduite lors de la définition du réseau, à la section 2.4.

Décrivons maintenant comment les clients font leur premier, deuxième et même troisième choix de routes. Regardons une première hypothèse.

Hypothèse 6: Les clients d'un marché tentent d'utiliser les routes en proportion des coefficients d'attraction.

On appelle celle-ci hypothèse pluraliste, car elle tient compte de la pluralité des préférences des clients en supposant que des clients placés dans une même situation ne sont pas tous attirés par la même route, mais se répartissent entre les routes donnant des avantages différents.

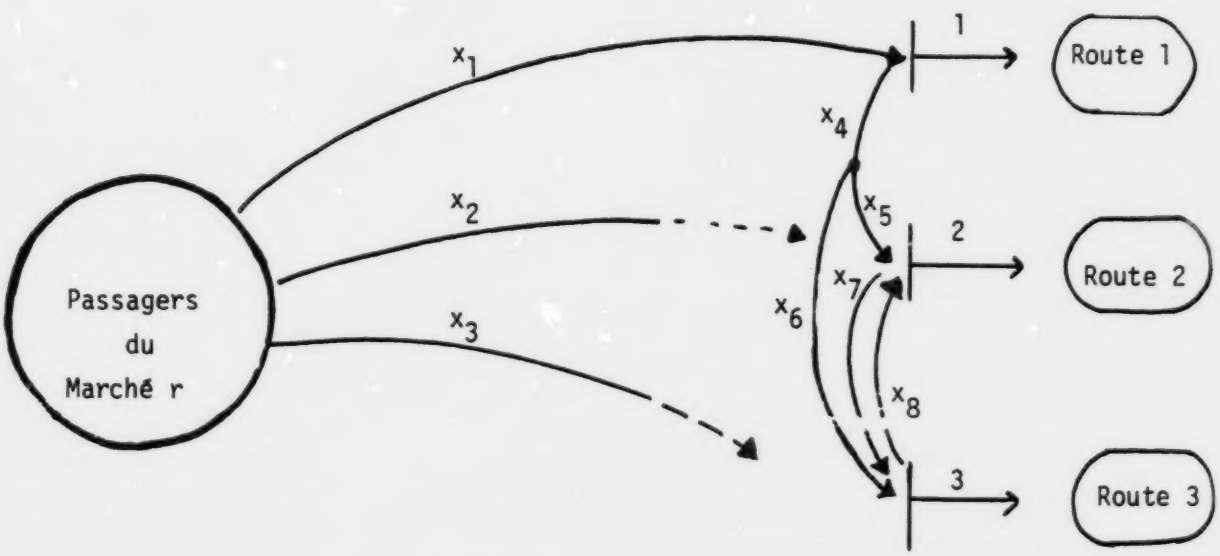
Avec cette hypothèse, si nous considérons les passagers lors de leur premier choix, nous pouvons les répartir sur les routes, directement en proportion des coefficients d'attraction. Par contre, lorsque nous considérons les passagers lors de leur deuxième ou troisième choix, pour les distribuer sur les routes, nous devons tenir compte du fait qu'ils peuvent utiliser les routes où ils ont déjà été refusés. La figure 15 présente la complexité des choix possibles. Les flèches correspondant aux choix pour les passagers refusés sur les routes 2 et 3, n'y apparaissent pas à cause de l'encombrement.

Sur cette figure, les arcs x_1, x_2 et x_3 représentent les passagers du marché r répartis entre les trois routes en proportion des coefficients d'attraction. L'arc x_4 correspond aux passagers refusés faute de place sur la route 1. Ces derniers font un nouveau choix de route.

Ils se répartissent sur les arcs x_5 et x_6 en proportion des coefficients d'attraction des routes 2 et 3. Une partie des passagers sur l'arc x_5 peuvent être refusés faute de place sur la route 2. Comme ces passagers en sont à leur troisième choix, ils doivent obligatoirement se retrouver sur l'arc x_7 pour utiliser la dernière route possible, la route 3. De la même façon, sur l'arc x_8, nous retrouvons la partie des passagers sur l'arc x_6 qui ont été refusés faute de place sur la route 3. Les passagers à leur troisième choix trouvent finalement place, car ce modèle considère que tous les passagers peuvent voyager.

FIGURE 15

CHEMINEMENT DES PASSAGERS



L'hypothèse de comportement des passagers refusés faute de place correspondant à la figure 15 s'exprime de la façon suivante: " Les clients ayant été refusés faute de place se répartissent entre les routes non essayées en proportion des coefficients d'attraction". Il est facile de supposer que cette hypothèse de comportement conduit à un système d'équations très complexe. Face à cette complexité, nous utilisons une hypothèse de comportement légèrement différente qui donne lieu à un modèle beaucoup plus simple. Cette hypothèse que nous appelons hypothèse oubliante s'énonce comme suit:

Hypothèse 7: Les clients ayant été refusés faute de place et qui font un autre choix de route se répartissent en proportion des coefficients d'attraction, entre les routes essayées ou non.

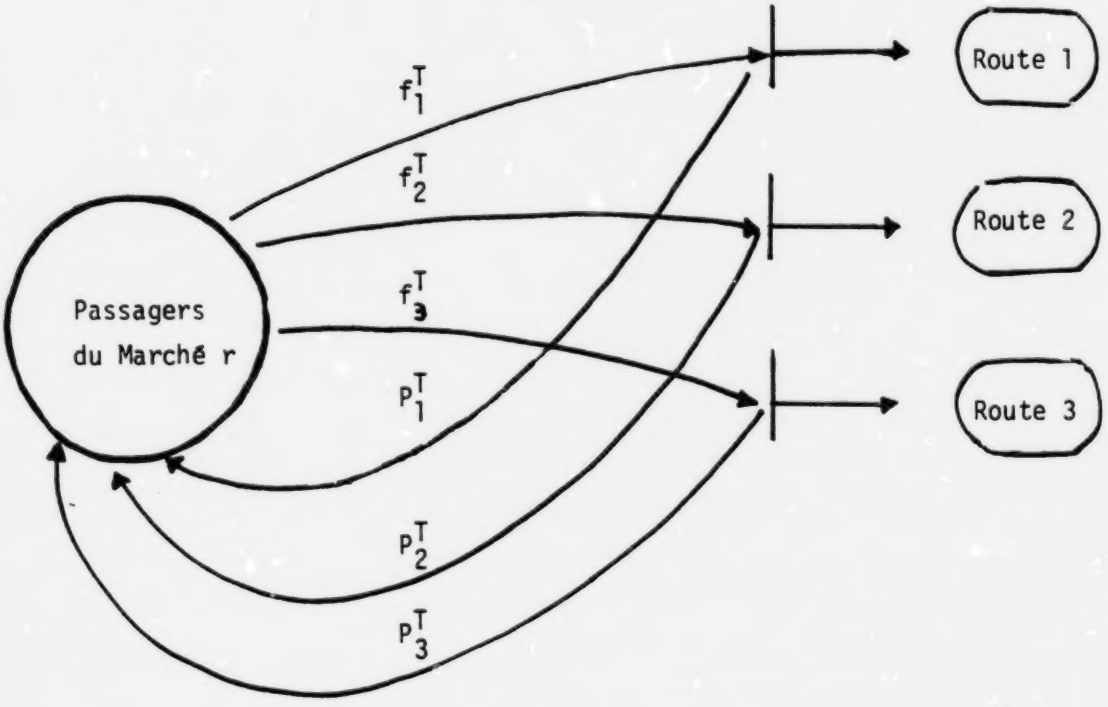
Suivant cette hypothèse, les passagers se comportent de la même façon à un premier, deuxième ou troisième essai. Ce type de comportement est représenté au la figure 16.

L'hypothèse oubliante n'entraîne pas beaucoup d'erreurs, même si elle permet à un passager d'essayer deux fois la même route. Ce cas est rare, car la probabilité d'être refusé est rarement supérieure à 5% et seulement la fraction A_q de ces passagers réessaie la même route.

Ainsi, à l'aide des hypothèses 1 et 2, nous pouvons confondre les passagers tentant d'utiliser une route q à leur premier, deuxième ou troisième essai et les regrouper dans la variable f_q^T. Puis, nous pouvons

FIGURE 16

CHEMINEMENT DES PASSAGERS SUIVANT L'HYPOTHÈSE OUBLIANTE



distribuer les passagers d'un marché selon la relation de proportionnalité suivante:

$$f_q^T = A_q \; u_r \qquad (\forall q \in Q_r) \tag{6.6}$$

En sommant sur les routes q d'un même marché Q_r, chacun des côtés de cette équation, nous obtenons l'équation:

$$u_r = \sum_{q \in Q_r} f_q^T \tag{6.7}$$

La variable u_r représente donc le nombre total d'essais faits par les passagers du marché r.

Maintenant, en susbtituant la variable f_q^T dans l'équation (6.2), à l'aide de l'équation (6.6), nous obtenons:

$$k_q + \bar{P}_q^T(k) = u_r \; A_q \quad (\forall q \in Q_r) \qquad (6.8)$$

Ainsi, les équations (6.1), (6.3) et (6.8) forment un système d'équations caractérisant les variables k_q.

Pour tout r, il existe un u_r tel que:

$$\begin{aligned} & k_q + \bar{P}_q^T(k) = u_r \; A_q \quad (\forall q \in Q_r) \; (\forall_r) \\ & \sum_{q \in Q_r} k_q = d_r^T \quad (\forall_r) \\ & k_q \geq 0 \quad (\forall q \in Q_r) \; (\forall_r) \end{aligned} \qquad (6.9)$$

Ce système d'équations comprend autant de variables que d'inconnues, permettant d'évaluer les variables u_r et k_q pour tout $q \in Q_r$.

Maintenant, comme $A_q > 0 \; \forall q \in Q_r$, alors nous pouvons diviser la première équation du système (6.9) par A_q pour obtenir la formulation du modèle M2 que l'on retrouve à la section suivante.

6.3 Equations du modèle

Ainsi, le système d'équations non-linéaire suivant définit le modèle M2:

MODÈLE M2

$$\frac{k_q - \bar{P}_q^T(k)}{A_q} = u_r \qquad (\forall q \in Q_r)\ (\forall r)$$

$$\sum_{q \in Q_r} k_q = d_r^T \qquad (\forall r) \tag{6.10}$$

$$k_q \geq 0 \quad (\forall q \in Q_r)\ (\forall r)$$

A partir de quelques remarques, nous écrivons maintenant le système (6.10) sous une forme équivalente. D'abord, voyons que le cas $u_r = 0$ ne peut se produire. Comme par définition, $\bar{P}_q^T \geq 0$, si $u_r = 0$ alors, il découle immédiatement que $k_q = 0, (\forall q \in Q_r)$ et $d_r^T = \sum_{q \in Q_r} k_q = 0$. Cette dernière égalité est évidemment impossible, car les marchés avec une demande nulle ne sont pas considérés. Cela implique donc que $u_r \neq 0$.

Ainsi, puisque u_r ne peut devenir nul, le cas $k_q = 0$ est aussi impossible. En effet, par définition, si $k_q = 0$ alors, $\bar{P}_q^T(\kappa_q) = 0$. Par la première équation du modèle, on obtient alors $u_r = 0$, ce qui est impossible.

Comme le cas $k_q = 0$ est exclus alors, le système (6.10) est équivalent au système suivant:

$$\frac{k_q + \bar{P}_q^T(k)}{A_q} = \begin{cases} = u_r & \text{si} \quad k_q > 0 \\ \geq u_r & \text{si} \quad k_q = 0 \end{cases} \qquad (\forall q \in Q_r)$$

$$\sum_{q \in Q_r} k_q = d_r^T$$

$$k_q \geq 0 \qquad (\forall q \in Q_r)\ (\forall r) \tag{6.11}$$

Nous avons écrit le système d'équations définissant le modèle M2 sous cette forme pour démontrer que ce système a la même structure que celle des conditions de Kuhn-Tucker du problème d'optimisation associé au modèle M1 (voir système d'équation (5.6)).

Cette observation suscite la question de l'existence d'un objectif f tel que les conditions (6.11) soient les conditions de Kuhn-Fucker d'un problème d'optimisation. Malheureusement, il n'existe pas de tel objectif, car la condition suivante n'est pas toujours satisfaite:

$$\frac{\partial}{\partial k_p}\left(\frac{k_q + \bar{P}_q^T(k)}{A_q}\right) = \frac{\partial}{\partial k_q}\left(\frac{k_p + \bar{P}_p^T(k)}{A_p}\right)$$

Nous sommes assurés que cette condition est vraie seulement si p et q sont deux routes desservant le même marché r. En effet, comme deux routes d'un même marché n'ont pas d'arcs en commun, dans ce cas,

$$\frac{\partial}{\partial k_p}\left(\frac{k_q + \bar{P}^T(k)}{A_q}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial k_q}\left(\frac{k_p + \bar{P}^T(k)}{A_p}\right) \qquad (6.12)$$

Comme la condition est vérifiée au niveau du sous-système correspondant à un marché, chacun de ces sous-systèmes:

$$\frac{k_q + \bar{P}_q^T(k)}{A_q} \begin{cases} = u_r & \text{si} \quad k_q > 0 \\ \geq u_r & \text{si} \quad k_q = 0 \end{cases} \qquad (\forall q \in Q_r)$$

$$\sum_{q \in Q_r} k_q = d_r^T$$

$$k_q \geq 0 \qquad (\forall q \in Q_r) \qquad (6.13)$$

peut être traité comme un problème d'optimisation. En effet, pour chacun des sous-systèmes, il existe un objectif associé w tel que les équations de Kuhn-Fucker du problème:

$$\text{Minimiser} \quad w\ (k)$$

$$\text{s.a.} \sum_{q \in Q_r} k_q = d^T$$

$$k_q \geq 0 \quad (\forall q \in Q_r) \qquad (6.14)$$

correspondent aux équations du sous-système. Ainsi, le sous-système (6.13) et le problème d'optimisation (6.14) possèdent la même solution.

6.4 Méthode de résolution du problème global

L'existence d'une solution pour le problème (6.10) n'est pas aussi directe que pour le problème précédent. F. Soumis [7] a construit une preuve d'existence exigeant des conditions relativement faibles, conditions généralement réalisées.

Comme précédemment, la méthode de résolution utilisée est une méthode de décomposition. La structure particulière du système d'équations (6.10) nous permet de le décomposer en sous-systèmes, chaque sous-système regroupant les équations associées à un marché. En effet, le système (6.10) comprend n bloc de n_r équations où n est le nombre de marchés et $n_r = |Q_r| + 1$

le nombre d'équations pour chaque marché, donnant lieu à n sous-systèmes de n_r équations.

Cette méthode de décomposition consiste à résoudre de façon séquentielle chaque sous-système correspondant à un marché, en maintenant fixes les variables des autres marchés. Comme nous l'avons vu à la section précédente, chacun de ces sous-systèmes d'équations peut être traité comme un problème d'optimisation. Ainsi, pour ajuster les variables d'un sous-système correspondant à un marché, nous résolvons le problème d'optimisation associé, en maintenant fixes les variables des autres marchés. L'ensemble des marchés est parcouru de façon cyclique et, un à un, les sous-problèmes sont réoptimisés. La solution se révèle optimale lorsque tous les sous-problèmes ont été parcourus sans pouvoir améliorer leur fonction économique.

Nous ne préciserons pas davantage la procédure de décomposition, car celle-ci correspond à la procédure présentée à la section (5.5) pour résoudre le problème (5.4).

La convergence de cette procédure de décomposition dans le contexte du problème (6.10) a été démontrée par F. Soumis [7]. Dans ce cas, la théorie de Zangwill n'a pu être utilisée, car pour ce problème, il n'existe pas d'objectif qui décroît d'une itération à l'autre. En effet, comme nous l'avons expliqué à la section précédente, le système d'équations (6.10) ne peut se ramener sous la forme d'un problème d'optimisation

où l'on minimise un objectif global. L'idée de base de la preuve de convergence est de considérer la méthode de décomposition comme une extension de la méthode de Gauss-Siedel pour la résolution des systèmes d'équations non-linéaires et de vérifier des conditions suffisantes déjà connues pour la convergence de la méthode Gauss-Siedel.

Pour compléter la résolution du problème (5.4), il nous faut considérer la résolution du problème d'optimisation associé à un marché. En effet, la résolution du problème, par la méthode de décomposition que nous venons de présenter, nous demande de résoudre une suite de problèmes qui ont la forme suivante:

Minimiser

$$w\ (\bar{k}_{Q_1},\ldots,\bar{k}_{Q_{r-1}},\ k_{Q_r},\ \bar{k}_{Q_{r+1}},\ldots,\bar{k}_{Q_m})$$

s.a.

$$\sum_{q\in Q_r} k_q = d_r^T$$

$$k_q \geq 0 \qquad (\forall q\in Q_r) \qquad (6.14)$$

La notation $\bar{k}_{Q_i}$ spécifie que les variables associées au marché Q_i ont une valeur fixe. La méthode utilisée pour résoudre ce sous-problème est présentée au chapitre suivant.

CHAPITRE SEPTIEME

RESOLUTION DU SOUS-PROBLEME ASSOCIE A UN MARCHE

Nous avons vu aux chapitres 5 et 6 que la résolution des modèles M1 et M2, par décomposition suivant les marchés, nous amène, dans un cas comme dans l'autre, à résoudre une suite de sous-problèmes de la forme suivante:

$$\text{Min} \quad g(\bar{h}_{Q_1}, \ldots, \bar{h}_{Q_{r-1}}, h_{Q_r}, \bar{h}_{Q_{r+1}}, \ldots, \bar{h}_{Q_n})$$

$$\text{s.a.} \sum_{q \in Q_r} h_q = d_r$$

$$h_q \geq 0 \quad (\forall q \in Q_r) \qquad (7.1)$$

En effet, les sous-problèmes (5.7) et (6.14) peuvent s'écrire ainsi en modifiant suelement la notation. Cette équivalence entre (5.7) et (6.14) nous permet donc de résoudre les sous-problèmes M1 et M2 en utilisant la même méthode de résolution.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode de résolution de ces sous-problèmes. Il s'agit d'un algorithme de direction réalisable. Comme nous le verrons, la méthode a été choisie pour éviter le calcul de l'objectif qui n'est pas connu explicitement dans le cas du problème (6.14).

Cette méthode est une version modifiée de celle présentée par F. Soumis [7] pour résoudre ce type de problèmes. Les modifications ont été effectuées principalement au niveau de la définition du pas optimal et de la méthode de calcul. Nous avons établi quelques nouveaux résultats théoriques et adapté la preuve de convergence de l'algorithme.

7.1 Approche globale

La méthode utilisée pour résoudre le problème (7.1) en est une de direction réalisable. Cette méthode de type primale génère une suite de solutions réalisables qui converge vers une solution optimale. Comme la solution est réalisable à chaque itération, il est possible de s'arrêter quand l'optimalité est jugée satisfaisante.

Chaque solution h^k de la suite est calculée à partir de h^{k-1} son prédécesseur de la façon suivante:

(1) Déterminer Y une direction de descente réalisable: c.-à-d. une direction Y pour laquelle il existe un $\sigma^0 > 0$ tel que si $0 \leq \sigma \leq \sigma^0$ alors $(h^{k-1}+\sigma Y)$ est réalisable et $g(h^{k-1}+ \sigma Y) < g(h^{k-1})$

(2) Effectuer le déplacement optimal dans cette direction; c.-à-d.
$h^k = h^{k-1} + \bar{\sigma}\, Y$ où $\bar{\sigma}$ est tel que
$$g\,(h^{k-1} + \bar{\sigma}\, Y) = \min_{\sigma \in R} g(h^{k-1} + \sigma\, Y)$$

où $R = \{\sigma : (h^{k-1} + \sigma\, Y)$ est réalisable $\}$.

La direction de descente que nous utilisons est celle qui donne la descente maximale de l'approximation du second ordre de l'objectif g. Pour cela, nous appelons celle-ci direction du second ordre. Comme nous le verrons à la section suivante, cette direction peut être calculée assez facilement à cause des particularisatés du problème considéré.

7.2 Calcul de la direction de descente

Avant de calculer la direction de descente, précisons les particularités du problème traité et les notations utilisées

$$g(h_{Q_r}) = g(h_{Q_r}, \bar{h}) = g(\bar{h}_{Q_1}, \ldots, \bar{h}_{Q_{r-1}}, h_{Q_r}, \bar{h}_{Q_{r+1}}, \ldots, \bar{h}_{Q_n})$$

$$C_q(h_q) = \frac{\partial g}{\partial h_q}(h_{Q_r}) > 0 \qquad (7.2)$$

$$S_q(h_q) = \frac{\partial C_q}{\partial h_q}(h_q) > 0 \qquad (7.3)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial C_q}{\partial h_q}(h_q) = 0 \quad \text{si} \quad p \in Q_r - \{q\} \qquad (7.4)$$

La relation (7.4) découle directement du fait que les routes d'un même marché n'ont pas d'arcs en commun. C'est aussi pour cette raison que les fonctions C_q et S_q sont fonctions de la seule variable h_q. La positivité des dérivées est facilement vérifiable. Notons que les inégalités (7.3) et (7.4) nous assurent que la matrice hessienne H de la

fonction g est une matrice diagonale et définie positive en tout point h_{Q_r}. Cela nous garantie donc la convexité stricte de l'objectif g et par le fait même l'unicité de la solution optimale du problème (7.1).

Soit $h^k_{Q_r} = (h^k_q : q \in Q_r)$ la solution optimale du problème (7.1). à l'itération k et $J_k = \{q \in Q_r : h^k_q = 0\}$.

Pour définir la direction du second ordre à partir de $h^k_{Q_r}$, introduisons les simplifications de notation suivantes $C_q = C_q(h^k_q)$, $S_q = (h^k_q)$, $T_q = T_q(h^k_q)$.

La direction du second ordre est la solution du problème d'optimisation suivant:

$$\text{Min} \sum_{q \in Q_r} \tfrac{1}{2} S_q y^2_q + C_q y_q$$

$$\text{s.a.} \sum_{q \in Q_r} y_q = 0$$

$$y_q \geq 0 \qquad (\forall q \notin J_k) \qquad (7.5)$$

Trouvons analytiquement la solution du problème (7.5) en utilisant les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker.

K-T.1	$S_q y_q + C_q - u = 0$	$(\forall q \notin J_k)$	
K-T.2	$S_q y_q + C_q - u \geq 0$	$(\forall q \in J_k)$	
K-T.3	$(S_q y_q + C_q - u) y_q = 0$	$(\forall q \in J_k)$	
K-T.4	$\sum_{q \in Q_r} y_q = 0$		
K-T.5	$y_q \geq 0$	$(\forall q \in J_k)$	(7.6)

Pour résoudre ce système, exprimons d'abord y_q comme une fonction de u. En travaillant avec les équations K-T.1, K-T.2 et K-T.3, nous arrivons facilement à l'expression suivante:

$$y_q(u) = \begin{cases} \dfrac{u - C_q}{S_q} & \text{si } q \notin J_k \text{ et si } q \in J_q \text{ et } u - C_q > 0 \\ 0 & \text{si } q \in J_k \text{ et } u - C_q \leq 0 \end{cases} \qquad (7.7)$$

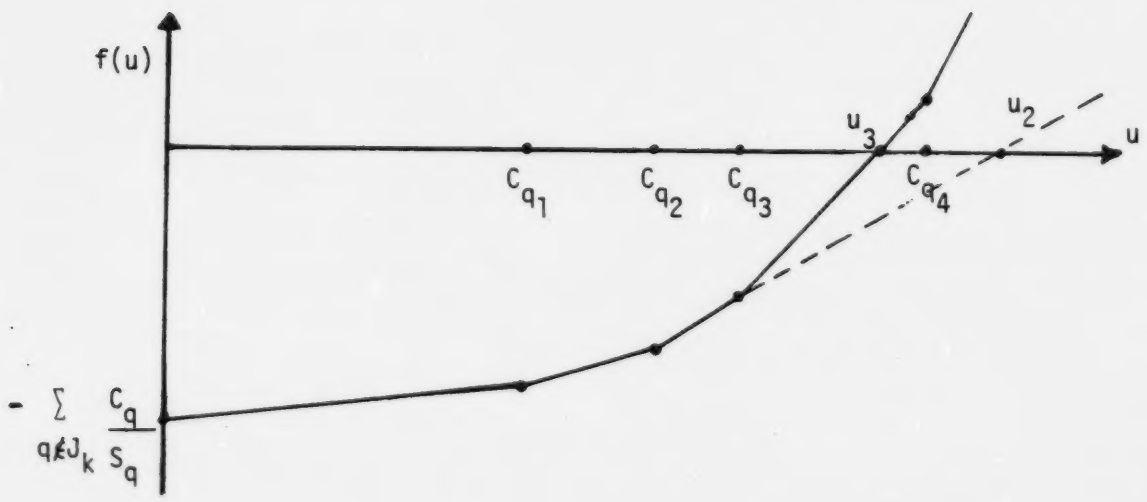
Déterminons maintenant la valeur $\overline{C}$ telle que

$$f(u) = \sum_{q \in \Omega_r} y_q(u) = 0$$

Pour cela, numérotons les C_q, $q \notin J_k$ de telle sorte que $C_{q_1} \leq C_{q_2} \ldots \leq C_{q_n}$

FIGURE 17

GRAPHIQUE DE f(u)



Le point où s'annule le prolongement linéaire de chaque morceau est donné par l'équation suivante:

$$u_j = C_{q_j} - f(C_{q_j}) \frac{C_{q_{j+1}} - C_{q_j}}{f(C_{q_{j+1}}) - f(C_{q_j})} \tag{7.8}$$

et en évaluant le membre de droite

$$u_j = \frac{\sum_{q \notin J_k} \frac{C_q}{S_q} + \sum_{i=1}^{j} \frac{C_{q_i}}{S_{q_i}}}{\sum_{q \notin J_k} \frac{1}{S_q} + \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{S_{q_i}}} \tag{7.9}$$

Ainsi, $\overline{C}$ est facilement déterminé en évaluant séquentiellement $u_0, u_1, u_2, \ldots$ jusqu'à ce que

$$C_{q_j} \leq \overline{C} = u_j < C_{q_{j+1}}$$

Si on note $P_k = \{ q : q \notin J_k \} \cup \{q_1, \ldots, q_j\}$, la direction Y définie par (7.5) est donc

$$y_q = \begin{cases} \dfrac{\overline{C} - C_q}{S_q} & \text{si} \quad q \in P_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.10}$$

Remarquons que y_q et $\overline{C}$ seront notés y_q^k et $\overline{C}^k$ seulement lorsqu'il sera utile de préciser l'itération.

Maintenant, démontrons que la direction du second ordre ainsi définie nous donne une direction de descente pour la fonction g, dans le cas où elle est non nulle. Dans le cas où elle est nulle, l'optimum est atteint.

Lemme 1:

Si la direction du secon ordre, $Y^k \neq 0$, alors Y^k est une direction de descente de la fonction g au point $h^k_{Q_r}$.

Preuve:

La direction du second ordre Y^k est la solution optimale du problème (7.5). En notant H, la matrice hessienne de la fonction g et ∇g le vecteur des dérivées premières de g, tous deux évalués au point $h^k_{Q_r} = (h^k_q : q \in Q_r)$, le problème (7.5) peut s'écrire de la façon suivante:

$$\text{Min } \tfrac{1}{2} Y^T H Y + \nabla_g^T Y$$

$$\text{s.a. } \sum_{q \in Q_r} y_q = 0$$

$$y_q \geq 0 \quad (\forall q \in J_k) \qquad (7.11)$$

Comme Y^k est la solution optimale de (7.11) , alors

$$\tfrac{1}{2} {Y^k}^T H Y^k + \nabla g^T Y^k \leq \tfrac{1}{2} Y^T H Y + \nabla g^T Y$$

pour toute direction réalisable Y.

En particulier, pour Y=0 qui est réalisable, cette relation est vérifiée, c.-à-d.

$$1/2\ Y^{k^T} HY^k + \nabla g^T Y^k \leq 0$$

Et, comme H est définie positive alors $Y^{k^T} HY^k > 0$, ce qui implique

$$\nabla g^T Y^k < 0$$

donc Y^k est une direction de décroissance pour la fonction g.

Lemme 2:

Si la direction du second ordre $Y^k = 0$, alors la solution à l'itération k, $h^k_{Q_r}$ est optimale pour le problème (7.1).

Preuve: (par contradiction)

Comme précédemment, notons ∇g le vecteur des dérivées premières de g au point $h^k_{Q_r} = (h^k_q:\ q \in Q_r)$.

Supposons que h_{Q_r} n'est pas une solution optimale du problème (7.1). Il existe alors une direction de descente pour g au point $h^k_{Q_r}$ qui est réalisable, c.-à-d.

$$\exists\ Y^0 \text{ tel que}$$

$$\nabla g^T Y^0 < 0 \quad \text{(direction de descente)} \qquad (7.12)$$

et

$$\sum_{q \in Q_r} y^0_q = 0$$

$$y^0_q \geq 0 \qquad (\forall q \in Q_r)\text{(direction réalisable)}$$

Soit

$\varepsilon > 0$ et $Y^{\varepsilon} = \varepsilon\, Y^{0}$ alors,

$\nabla g^{T}\, Y^{\varepsilon} = \varepsilon\, \nabla g^{T}\, Y^{0} < 0$

et

$$\begin{cases} \sum_{q \in Q_r} y_q^{\varepsilon} = \varepsilon \sum_{q \in Q_r} y_q^{0} = 0 \\ y_q^{\varepsilon} = \varepsilon\, y_q^{0} \geq 0 \quad (\forall\, q \in Q_r) \end{cases}$$

d'où Y^{ε} est aussi une direction de descente de g au point $h^{k}_{Q_r}$ qui est réalisable.

Comme $Y^{k} = 0$ est la direction du second ordre, alors Y^{k} 0 est la solution optimale du problème (7.11), c.-à-d.

$$1/2\; Y^{T} H\, Y + \nabla g^{T} Y \geq 0$$

pour toute direction réalisable Y. (7.13)

Maintenant, voyons s'il existe une valeur de ε pour laquelle l'inégalité (7.13) ne serait pas vérifiée.

$$1/2\; Y^{\varepsilon^{T}} H\, Y^{\varepsilon} + \nabla g^{T}\, Y^{\varepsilon} = \varepsilon\, [(1/2\; Y^{0^{T}} H\, Y^{0})\, \varepsilon + (\nabla g^{T}\, Y^{0})]$$

Comme H est une matrice définie positive, alors $Y^{0^{T}} H\, Y^{0} > 0$. De plus, par (7.12), nous avons $\nabla g^{T}\, Y^{0} < 0$ d'où

$\forall \varepsilon < (-\nabla g^{T}\, Y^{0} \,/\, 1/2\; Y^{0^{T}} H\, Y^{0})$ alors

$\varepsilon\, [(1/2\; Y^{0^{T}} H\, Y^{0})\, \varepsilon + (\nabla g^{T}\, Y^{0})] < 0$

c.-à-d.,

$$1/2\ Y^{\varepsilon T} H\ Y^{\varepsilon} + \nabla g^{T}\ Y^{\varepsilon} < 0$$

ce qui contredit l'inégalité (7.13)

7.3 Calcul du pas optimal

Avant de calculer le pas optimal $\bar{\sigma}$, évaluons σ^0 la valeur maximale de σ tel que $(h^k + \sigma^Y)$ soit réalisable. Il est facile de voir que la première équation définissant le domaine réalisable du problème (7.1) est toujours vérifiée. En effet, par définition $\sum_{q\in Q_r} y_q = 0$ et puisque h^k est réalisable, alors $\sum_{q\in Q_r} h_q^k = d_r$ d'où $\sum_{q\in Q_r} (h_q^k + \sigma\, y_q) = d_r$. Ainsi, σ^0 sera la valeur maximale de σ pour laquelle la deuxième équation du domaine réalisable $(h^k + \sigma\, y_q) \geq 0$ reste vraie, d'où

$$\sigma^0 = \min_{\{q:\ y_q < 0\}} \left\{ - \frac{h_q^k}{y_q} \right\} \tag{7.14}$$

Définissons aussi $P(\sigma) = \nabla g\ (h^k + \sigma\, Y)\ .\ Y$

La méthode proposée pour le calcul du déplacement optimal découle directement de l'équivalence entre les problèmes suivants.

(1) Trouver $\bar{\sigma} \in [0, \sigma^0]$ minimisant $g\ (h^k + \sigma\, Y)$

(2) Si $P(\sigma) < 0$, alors prendre $\bar{\sigma} = \sigma^0$ sinon trouver la racine $\bar{\sigma}$ de $P(\sigma)$.

Cette équivalence se démontre facilement à partir de l'hypothèse que g est convexe. Rappelons que la convexité de g est garantie par (7.3) et (7.4).

Ainsi, pour trouver le déplacement optimal σ , nous calculons la racine de P ($\bar{\sigma}$) par bissection de l'intervalle $[0,\sigma^0]$. Au début P(0) et $P(\sigma^0)$ sont de signes différents. Après chaque bissection, nous conservons l'intervalle contenant le changement de signe de P donc après k itérations $| \sigma^k - \bar{\sigma} | \leq \sigma^0 (1/2)^k$. Cette méthode converge plus rapidement que la méthode de la section dorée pour la recherche du minimum de g. Avec la méthode de la section dorée, $| \sigma^k - \bar{\sigma} | \leq \sigma^0 (\frac{1}{\rho})^k$ où ρ = 1.618...le nombre d'or. Par conséquent, pour des raisons d'efficacité, il vaut mieux évaluer la racine de $P(\sigma)$ par la méthode de bissection que de tenter de minimiser f par la méthode de la section dorée.

Une autre raison importante nous fait opter pour la recherche de la racine de $P(\sigma)$. Comme la fonction objective g du sous-problème n'est pas connue explicitement dans le cas du modèle M2, il est plus facile de travailler avec la dérivée de la fonction g qui est connue.

Maintenant, spécifions en quoi diffère cette méthode pour la recherche du pas optimal avec celle proposée par F. Soumis [7]. Plutôt que de choisir σ^k, le pas optimal à l'itération k, comme la racine de $P(\sigma)$, il définit σ^k en se référant aux conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker du problème (7.1). De façon plus précise, σ^k est choisi de telle

sorte que l'écart obtenu de la vérification des équations de Kuhn-Tucker soit minimum. Par la suite, il fait la recherche du minimum de cette fonction mesurant l'écart par la méthode de la section dorée. Le plus grand désavantage de cette méthode par rapport à celle que nous proposons est que la direction du second ordre Y n'est pas nécessairement une direction de décroissance de la fonction minimisée mesurant l'écart dans les équations de Kuhn-Tucker du problème.

7.4 Convergence de l'algorithme

L'algorithme proposé génère, à chaque itération, une direction Y^k en déterminant un ensemble P_k de variables à modifier et calcule h^{k+1} une nouvelle solution réalisable telle que $g(h^{k+1}) < g(h^k)$. La suite de solutions $\{k^k\}$ converge-t-elle vers la solution optimale du problème (7.1)?

Cette convergence ne peut être démontrée en utilisant les résultats de Zangwill, car l'application qui détermine le point h^k, à partir de la direction du second ordre Y^k, n'est pas une application fermée; l'expression définissant la direction Y^k change chaque fois que varie P_k.

Nous démontrons que l'algorithme converge vers la solution optimale du problème (7.1) à l'aide des théorèmes suivants.

Théorème 1:

Quelque soit la façon dont on calcule le pas entre 0 et 1, l'ensemble P_k devient constant après un nombre fini d'itérations (c.-à-d.^{k} $\exists k^*$ tel que $k > k^* \rightarrow P_k = P^*$).

La démonstration de ce théorème a été réalisée en modifiant la preuve d'un théorème analogue présenté par F. Soumis [7] pour une autre variante de l'algorithme. Avant de donner la démonstration du théorème 1, nous énonçons trois lemmes qui seront utilisés dans cette démontration. Les preuves des trois lemmes se retrouvent en annexe 1, car ceux-ci ont été tirés de [7] en y apportant aucune modification.

Lemme 1 : $y_q^k \leq 0$ implique $C_q\ (h_q^{k+1}) \geq \overline{C}^k$.

Lemme 2 : Si $\overline{C}^k > C_q(0)$, alors $h_q^{k+1} > 0$

Lemme 3 : Si les variables positives avant l'itération k demeurent positives à la fin de l'itération k (c.-à-d. $h_q^k > 0$ implique $h_q^{k+1} > 0$), alors $\overline{C}^{k+1} \geq \overline{C}^k$.

Preuve: (théorème 1)

Si l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations, alors le résultat est immédiat. Sinon, soit $\{P_k\}$ la suite infinie d'ensembles définis durant l'algorithme. Supposons par contradiction que P_k ne devient pas constant après un nombre fini d'itérations c.-à-d.

$\forall k$, $\exists k' > k$ tel que $P_{k'} \neq P_k$.

$P_{k+1} = P_k$ +{variables nulles à l'itération k qui seront augmentées à l'itération k+1} - {variables qui deviennent nulles à l'itération k et demeurent nulles à l'itération k+1}.

Comme il y a un nombre fini de variables, il n'y a qu'un nombre fini de variables qui sont augmentées et qui restent non-nulles par la suite. Il y a donc une suite infinie d'itérations où une variable s'annule. Et, comme il y a un nombre fini de variables qui peuvent s'annuler et demeurer nulles, il existe un indice k tel qu'après un nombre fini d'itérations, toutes les varialbles qui s'annulent redeviennent positives par la suite. Soit H l'ensemble des indices des varialbes qui s'annulent après l'itération k. Soit $s \in H$ tel que

$$C_s(0) = \max_{q \in H} C_q(0) \qquad (7.15)$$

Soit $v>k$ une itération où h_s^v devient positive, c.-à-d. $h_s^v = 0$ et $h_s^{v+1} > 0$. Alors, la direction $y^v{}_s > 0$ et

$$y_s^v = \frac{\bar{C}^v - C_s(0)}{S_s(0)} > 0 \text{ implique } \bar{C}^v > C_s(0)$$

La définition de s (7.15) entraîne $\bar{C}^v > C_q(0)$ pour q H et ainsi par le lemme 2 (annexe 1), il s'ensuit qu'aucune variable de l'ensemble H ne s'annule à l'itération v. Ainsi, aucune variable ne s'annule à l'itération v, car les variables dont l'indice n'appartient pas à H ne peuvent s'annuler à une itération $v>k$.

Comme aucune variable ne s'annule à l'itération v, le lemme 3 (annexe 1) implique $\bar{C}^{v+1} \geq \bar{C}^v$. Ainsi, $\bar{C}^{v+1} > C_q(0)$ pour $q \in H$ et l'application alternative des lemmes 2 et 3 (annexe 1) entraîne qu'aucune variable ne s'annule par la suite. Ceci contredit l'existence d'une suite infinie d'itérations où une variable s'annule, ce qui complète la preuve du théorème.

Théorème 2:

L'algorithme proposé converge vers une solution h* du problème (7.1).

Preuve:

Soit k* tel que pour k >k*, $P_k = P^*$. Le théorème 1 que nous venons de démontrer nous assure l'existence d'un tel indice k*.

Considérons le problème restreint obtenu du problème (7.1) en fixant à 0 les variables h_q tel que $q \notin P^*$. Comme après l'itération k* de l'algorithme, la direction Y^k est toujours définie avec le même ensemble $P^k = P^*$ et Y^k est une fonction continue de h^k, l'algorithme est une application fermée pour le problème restreint. Par les résultats de Zangwill, l'algorithme converge donc vers une solution h* qui est optimale pour le problème restreint. Pour démontrer que cette solution h* est aussi optimale pour le problème (7.1), démontrons qu'elle vérifie les conditions de Kuhn-Tucker de ce problème.

Comme h* est solution optimale du problème restreint, elle vérifie les conditions de Kuhn-Tucker de ce prblème c.-à-d.

$$C_q(h^*) = u \qquad \text{si } h_q^* \neq 0 \quad \text{et } q \in P^* \tag{7.16}$$

$$C_q(h^*) \geq u \qquad \text{si } h_q^* = 0 \quad \text{et } q \in P^* \tag{7.17}$$

Aussi, comme $P_k = P^*$ pour k>k*, alors par définition, $\bar{C}$ prend obligatoirement la valeur u_o pour les itérations k>k* et

$$C_q(h^k) \geq u_o(h^k) \qquad \forall q \notin P_k = P^* \tag{7.18}$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit $k>k^*$, nous pouvons passer à la limite de chaque côté.

$$\lim_{k \to \infty} C_q (h^k) \geq \lim_{k \to \infty} u_o (h^k) \quad \forall q \notin P^* \tag{7.19}$$

De plus, comme C_q et u_o sont des fonctions continues, alors

$$\lim_{k \to \infty} C_q (h^k) = C_q (h^*)$$

et

$$\lim_{k \to \infty} u_o (h^k) = u_o (h^*)$$

D'où

$$C_q (h^*) \geq u_o (h^*) \qquad \forall q \notin P^* \tag{7.20}$$

Maintenant, montrons que $u_o (h^*) = u$ (où u est défini par (7.16) et (7.17))

$$u_o (h^*) = \frac{\sum_{q \in P^*} \frac{C_q (h^*)}{S_q (h^*)}}{\sum_{q \in P^*} \frac{1}{S_q (h^*)}}$$

D'où, par (7.16)

$$u_o(h^*) = \frac{\sum_{q\in P^*} \frac{u}{S_q(h^*)}}{\sum_{q\in P^*} \frac{1}{S_q(h^*)}} = u$$

Ainsi, l'inégalité (7.20) devient

$$C_q(h^*) \geq u \qquad \forall q \notin P^* \tag{7.21}$$

Ainsi, comme h^* est solution du problème restreint, $h_q^* = 0$ $\forall q \notin P^*$ et alors les équations (7.16), (7.17) et (7.21) peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$C_q(h^*) = u \quad \text{si } h_q^* \neq 0 \tag{7.22}$$

$$C_q(h^*) \geq u \quad \text{si } h_q^* = 0 \tag{7.23}$$

Les équations (7.22) et (7.23) correspondant aux équations de Kuhn-Tucker du problème (7.1) évaluées au point h^*, nous pouvons conclure que h^* est solutuion optimale du problème (7.1), ce qui termine la preuve du théorème.

CHAPITRE HUITIEME

RESULTATS ET CONCLUSIONS

Les modèles M1 et M2 présentés dans ce travail ont été expérimentés pour une situation réelle en utilisant des données fournies par la Compagnie Air Canada.

L'expérimentation a été réalisée avec la demande et l'horaire de l'hiver 1976, pour l'ensemble de leur réseau. Ainsi, nous avons pu comparer l'assignation des passagers générée par les modèles M1 et M2 avec la distribution des passagers observée durant cette période.

Air Canada opère à la fois un réseau international s'étendant aux Etats-Unis, aux Antilles et en Europe et un vaste réseau intérieur comprenant une trentaine de villes fortement connectées entre elles. Ce réseau nous permet d'éprouver la qualité du modèle, car le cheminement des passagers dans celui-ci est assez complexe. En effet, deux villes sont généralement reliées par plusieurs itinéraires dans l'espace et dans le temps.

Le réseau comprend 76 villes et 629 paires origines-destinations. Nous considérons seulement les origines-destinations pour lesquelles voyagent au moins un passager par jour. L'horaire considéré comprend 329 vols dont 202 sont des vols directs, 73, des vols d'une escale et 54, des vols comportant de 2 à 5 escales. Le réseau comprend un total de 539 arcs. Ils offrent aux différentes origines-destinations 800 chaînes sans correspondance et 700 chaînes avec correspondance en

retenant toutes les chaînes avec correspondance transportant au moins un passager par jour.

Les données nécessaires pour évaluer les modèles sont les suivantes:

(a) La demande pour chaque origine-destination.

(b) La distribution de la demande suivant les heures de la journée.

(c) Un horaire des vols offerts ainsi que la capacité des avions assurant les vols.

(d) Le nombre de passagers ayant utilisé chacun des vols pour comparer avec la répartition obtenue avec les modèles.

Pour évaluer et ajuster les paramètres des modèles, nous considérons la différence entre le nombre de passagers affectés par le modèle à chacun des arcs du réseau et le nombre de passagers observés et nous calculons différentes moyennes à partir de ces erreurs. Nous partageons les arcs en 3 sous-ensembles: ceux très occupés, ceux moyennement occupés et ceux peu occupés. Ces sous-ensembles comprennent respectivement les arcs pour lesquels $(C_a-u_a)/\sigma_a \in (-\infty, 1), (1,2), (2,\infty)$ où C_a est la capacité de l'avion, u_a le nombre moyen de passagers observés et σ_a son écart-type. Pour chacun de ces ensembles, nous évaluons l'erreur moyenne. Nous calculons aussi l'erreur moyenne pour l'ensemble des arcs correspondant à un même type d'avion. Ces différentes moye-nes nous donnent une bonne mesure de la qualité de la prédiction des modèles.

Il est important de noter que les sous-problèmes ont été résolus seulement à ε près, car leur résolution exacte demande un nombre infini d'itérations. Tous les résultats se trouvant dans ce chapitre ont été obtenus en utilisant une même valeur de ε. Celle-ci a été choisie pour obtenir à la fois une bonne précision des résultats et de bons temps de calcul.

8.1 Calibration du modèle M1

L'objectif du modèle M1, tel que défini au chapitre 5, comporte un premier terme Z_1, mesurant les revenus perdus à cause des passagers excédentaires et un deuxième terme Z_2 mesurant le coût d'utiliser des routes moins attrayantes. Une constante K pondère l'effet relatif de l'attraction et de la disponibilité des routes. Le tableau 1 présente les résultats obtenus du modèle avec différentes valeurs de K.

Comme nous le montre ce tableau, un K trop grand rend l'erreur moyenne positive pour l'ensemble des arcs très occupés et négative pour l'ensemble des arcs peu occupés. En augmentant la valeur de K, on diminue l'importance du terme Z_1 relié à l'espérance de passagers excédentaires par rapport au terme Z_2 relié à l'attraction. Ainsi, en rendant la contrainte de limite de capacité des avions moins effective, on permet à plus de passagers d'utiliser les arcs très occupés et moins de passagers se retrouvent sur les arcs peu occupés. Une valeur de K trop petite produit l'effet inverse. La valeur de K est

donc choisie de façon à rendre presque nulle l'erreur moyenne pour les 3 sous-ensembles d'arcs. La valeur de K =1/4.5 vérifie ces conditions et minimise aussi la moyenne des erreurs absolues pour tous les arcs.

TABLEAU 1

EFFET DU PARAMETRE K

TESTS FAITS EN FIXANT LES PARAMETRES β_1=1.0, β_2=1.0, β_3=2.0				
K	ERREUR MOYENNE POUR CHAQUE ENSEMBLE D'ARCS			Moyenne pour tous les arcs de la valeur absolue de l'erreur
	Peu occupés	Moyennement occupés	Très occupés	
1.0	-4.2	-0.4	3.8	10.0
1/2.0	-2.5	-0.3	0.6	9.2
1/3.0	-1.0	-0.2	-2.5	8.8
1/4.0	-0.2	-0.1	-5.3	8.5
1/4.5	0.2	-0.3	-4.9	8.4
1/5.0	0.7	-0.4	-5.6	8.4
1/6.0	0.8	-0.4	-6.5	8.4
1/7.0	0.6	-0.3	-7.1	8.4
1/8.0	0.8	-0.3	-7.4	8.5
1/10.0	1.4	-0.3	-8.9	8.5

Le modèle d'attraction présenté à la section 3.2 et utilisé dans le terme Z_2 de l'objectif du modèle M1 comporte aussi trois paramètres à calibrer: β_1, β_2 et β_3. Comme β_1 et β_2 sont reliés à des facteurs de même nature, nous donnons la même valeur à ces deux paramètres. Le tableau 2 présente les résultats du modèle obtenus en faisant varier β_3 par rapport à β_1 et β_2. Les valeurs des paramètres minimisant la moyenne des erreurs absolues sont β_1=1.0, β_2=1.0 et β_3=2.0.

TABLEAU 2

EFFET DES PARAMETRES β_1, β_2 et β_3

TESTS FAITS EN FIXANT LE PARAMETRE K = 1/4.5				
β_1	β_2	β_3	$\frac{\beta_1}{\beta_3} = \frac{\beta_2}{\beta_3}$	Moyenne pour tous les arcs de la valeur absolue de l'erreur
2.0	2.0	1.0	2	8.8
1.5	1.5	1.0	3/2	8.7
1.0	1.0	1.0	1	8.5
2.0	2.0	2.5	4/5	8.8
2.0	2.0	3.0	2/3	8.7
1.5	1.5	2.5	3/5	8.6
1.0	1.0	2.0	1/2	8.4
1.0	1.0	3.0	1/3	9.1
1.0	1.0	5.0	1/5	13.4

8.2 Résultats du modèle M1

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus du modèle M1 en fixant les paramètres β_1=1.0, β_2=1.0, β_3=2.0 et k =1/4.5. Les tableaux 3 et 4 donnent la distribution des erreurs relatives au flot sur les arcs pour différents sous-groupes d'arcs.

Comme nous le montre le tableau 3, le modèle est moins précis pour les arcs ayant un coefficient d'utilisation faible. En effet, pour les racs peu occupés, l'erreur absolue moyenne est de 11.2 et pour les arcs moyennement occupés et très occupés, elle est de 7.6 et 8.5 seulement. Pour les arcs très occupés, la répartition des passagers est fortement dépendante de la disponibilité, tandis que pour les arcs moins occupés elle dépend surtout de l'attraction. Ainsi , l'utilisation d'un modèle d'attraction plus précis pourrait sûrement améliorer les résultats.

Le tableau 4 montre des erreurs élevées pour les avions à grande capacité. En effet, un des 747 possède une erreur absolue moyenne de 23.5, ce qui est très grand par rapport à un DC9 dont l'erreur absolue est de 6.7. Ces erreurs significatives proviennent en grande partie de la priorité accordée par la compagnie à certains modèles d'avion, sur des routes particulières. Cette erreur pourrait être facilement corrigée, encore une fois, en utilisant un modèle d'attraction moins simpliste. Il suffirait d'ajouter à ce modèle un terme relié au type d'avion qui tiendrait compte des choix imposés aux pas-

sagers par la compagnie et aussi de la préférence des passagers pour certains types d'avion.

Même si le modèle M1 utilise un modèle d'attraction simpliste, il donne de très bons résultats. En effet, la moyenne des erreurs absolues pour l'ensemble des arcs n'est que de 8.4 passagers. De plus, le temps de calcul exigé pour atteindre cette solution est très petit. L'optimum est atteint après 11 parcours des origines-destinations avec un temps de calcul de 20.8 sec.

TABLEAU 3

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS POUR LES SOUS-ENSEMBLES D'ARCS OBTENUS EN DIVISANT SUIVANT LES CRITERES D'OCCUPATION ET LONGUEUR DES ARCS

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS

ENSEMBLE DES ARCS PEU OCCUPES

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	2	0	2	3	8	13	49	20	2	3	2	1	2	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 107 MOYENNE: .2 ECART-TYPE: 18.3 ECART ABSOLU: 11.2 SIGMA: .61 SIGMA ABS.: 4.81

ENSEMBLE DES ARCS MOYENNEMENT OCCUPES

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	1	7	16	94	167	80	20	3	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 388 MOYENNE: -.3 ECART-TYPE: 10.0 ECART ABSOLU: 7.6 SIGMA: .30 SIGMA ABS.: 2.97

ENSEMBLE DES ARCS TRES OCCUPPES

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	1	0	0	0	1	4	12	21	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 44 MOYENNE: -4.9 ECART-TYPE: 13.7 ECART ABSOLU: 8.5 SIGMA: -1.64 SIGMA ABS.: 2.81

ENSEMBLE DES ARCS COURTS

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	2	0	3	10	20	97	103	78	13	5	2	1	1	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 415 MOYENNE: -1.1 ECART-TYPE: 12.1 ECART ABSOLU: 8.3 SIGMA: .02 SIGMA ABS.: 3.28

ENSEMBLE DES ARCS DE LONGUEUR MOYENNE

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	16	37	15	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 81 MOYENNE: .6 ECART-TYPE: 9.7 ECART ABSOLU: 7.5 SIGMA: .82 SIGMA ABS.: 3.06

ENSEMBLE DES ARCS LONGS

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	6	17	10	4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 43 MOYENNE: 2.3 ECART-TYPE: 18.3 ECART ABSOLU: 11.3 SIGMA: .74 SIGMA ABS.: 4.24

ENSEMBLE DES ARCS AU COMPLET

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	1	2	0	3	11	28	119	237	103	24	6	2	1	2	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 539 MOYENNE: -.6 ECART-TYPE: 12.4 ECART ABSOLU: 8.4 SIGMA: .20 SIGMA ABS.: 3.32

TABLEAU 4

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS POUR LES SOUS-ENSEMBLES D'ARCS OBTENUS EN DIVISANT SUIVANT LE TYPE D'AVION

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU DC9

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	17	37	13	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 76 MOYENNE: -1.7 ECART-TYPE: 8.7 ECART ABSOLU: 6.7 SIGMA: -.51 SIGMA ABS: 2.50

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU D9SF

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	1	3	10	75	136	55	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 289 MOYENNE: -.9 ECART-TYPE: 8.9 ECART ABSOLU: 6.7 SIGMA: -.05 SIGMA ABS: 2.60

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU A727

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	28	5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 49 MOYENNE: -1.4 ECART-TYPE: 9.9 ECART ABSOLU: 7.3 SIGMA: .36 SIGMA ABS: 2.94

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU DC8F

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 7 MOYENNE: -2.3 ECART-TYPE: 8.0 ECART ABSOLU: 5.3 SIGMA: -.58 SIGMA ABS: 2.60

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU R727

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	2	0	1	4	2	10	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 25 MOYENNE: -15.1 ECART-TYPE: 17.7 ECART ABSOLU: 16.7 SIGMA: -3.94 SIGMA ABS: 4.35

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU B747

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 6 MOYENNE: -4.9 ECART-TYPE: 36.7 ECART ABSOLU: 23.5 SIGMA: -4.61 SIGMA ABS: 10.15

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU D8SF

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	1	3	2	5	18	10	6	2	1	1	2	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 91 MOYENNE: 5.3 ECART-TYPE: 19.9 ECART ABSOLU: 13.8 SIGMA: 2.05 SIGMA ABS: 6.60

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU LD10

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	3	13	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 28 MOYENNE: 10.2 ECART-TYPE: 13.2 ECART ABSOLU: 14.0 SIGMA: 4.77 SIGMA ABS: 6.09

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU A747

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 8 MOYENNE: 2.1 ECART-TYPE: 3.8 ECART ABSOLU: 3.1 SIGMA: .77 SIGMA ABS: 1.19

Les figures 18 et 19 donnent une bonne idée de la qualité des résultats obtenus avec le modèle M1. La figure 18 donne la distribution de l'erreur pour l'ensemble total des arcs. Nous constatons que 44% des arcs présentent une erreur entre -5 et 5 passagers tandis que seulement 14.7% des arcs présentent une erreur supérieure à $\pm$ 15 passagers, ce qui est très bon.

Le graphique de la figure 19 représente les flots sur les arcs calculés par le modèle M1 en fonction des flots observés. La concentration des points le long de la diagonale démontre la grande qualité des résultats.

FIGURE 18

DISTRIBUTION DE LA DIFFERENCE ENTRE LE NOMBRE DE PASSAGERS CALCULES PAR LE MODELE M1 ET LE NOMBRE DE PASSAGERS OBSERVES, AU NIVEAU DES ARCS

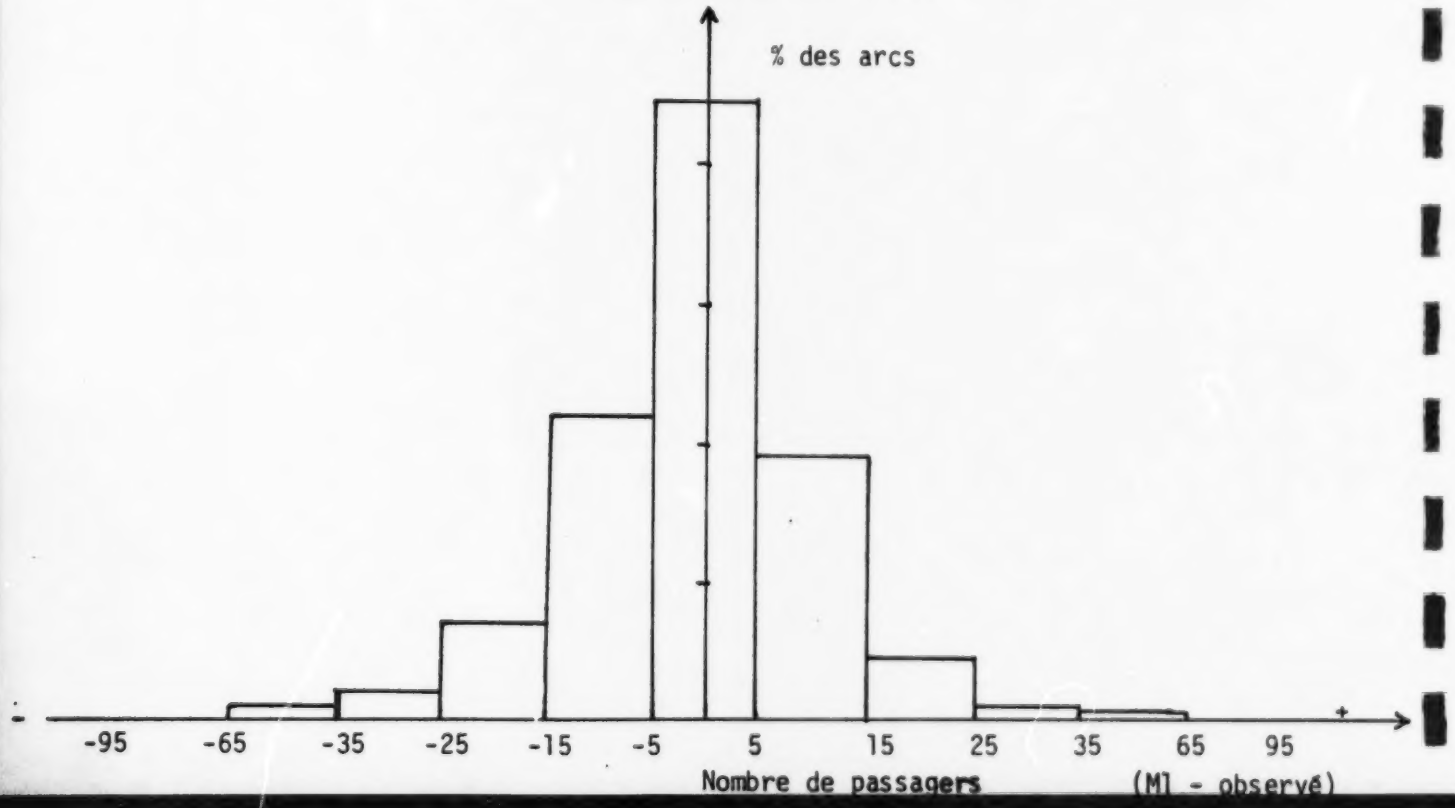
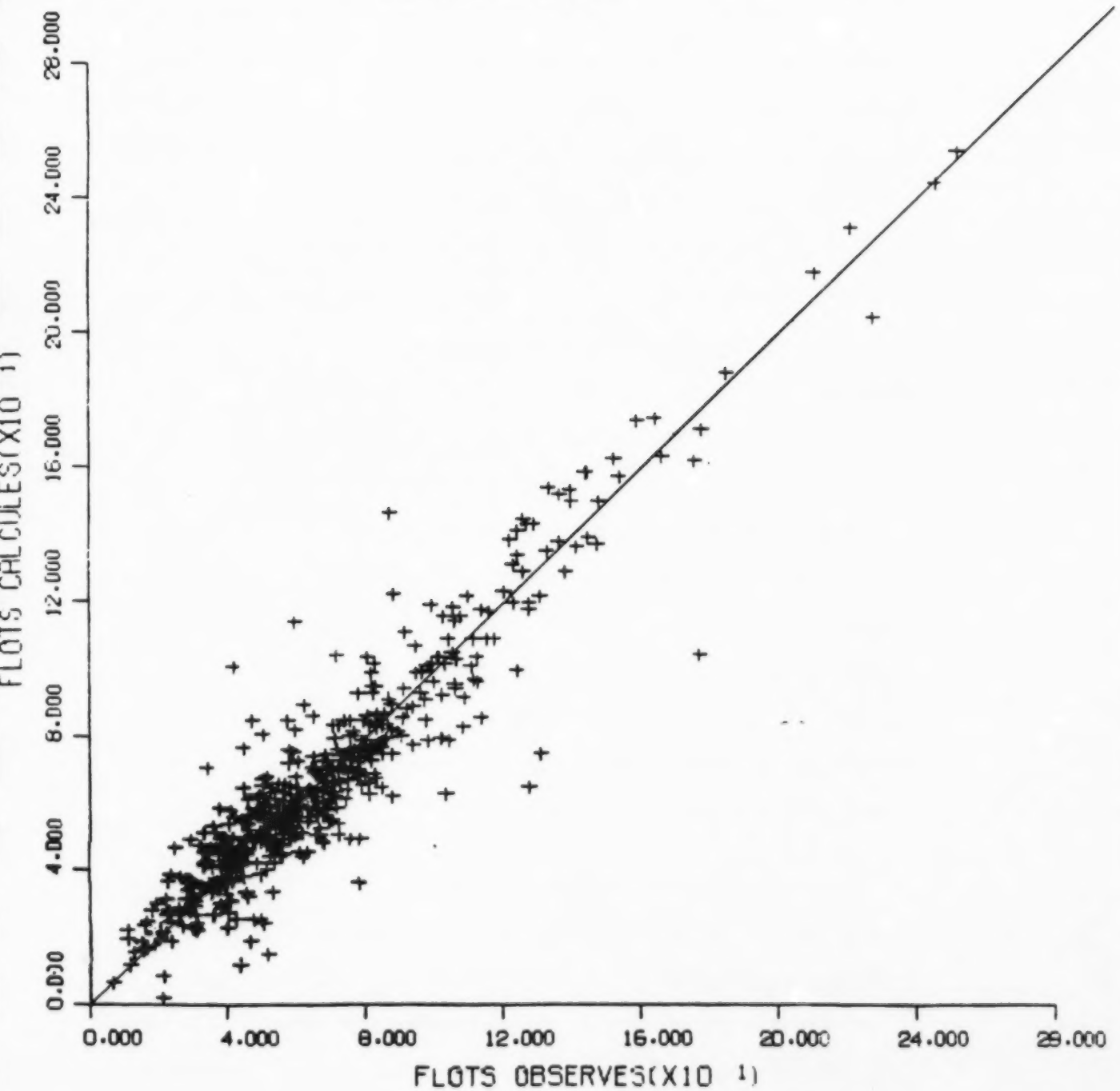


FIGURE 19

NOMBRE DE PASSAGERS SUR UN ARC CALCULE PAR LE MODELE M1 EN FONCTION DU NOMBRE DE PASSAGERS OBSERVES



8.3 Calibration du modèle M2

A la section 4.3, lors de la définition de la fonction approximant le nombre de passagers excédentaires sur une route,pour le modèle M2, nous avons utilisé le paramètre M sans le préciser. Rappelons que ce paramètre a été introduit dans le but de prolonger la fonction pour les assignations des passagers dépassant la capacité sur un des arcs de la route. Comme le montre le tableau 5, pour des petites valeurs de M, le modèle donne de moins bons résultats. Lorsque M est petit, le modèle permet au flot sur les arcs de dépasser facilement la capacité. Il favorise ainsi des solutions non-réalisables et s'éloigne de la solution réelle. Pour éviter que le modèle se comporte ainsi, on pourrait penser à donner une grande valeur à ce paramètre. Cependant, les tests nous ont montré qu'en augmentant M, on augmente le temps d'exécution, ce qui crée des problèmes de convergence. Une très grande valeur de M a pour effet d'empêcher le flot sur les arcs de dépasser la capacité. Ainsi, lorsque le flot sur un arc approche la limite de capacité, l'algorithme ne fait que de petites modifications du flot et s'approche très lentement de l'optimum.

Pour les tests suivants, nous avons choisi M =10. Cette valeur de M n'est pas tellement grande, mais nous avons eu, malgré cela, des problèmes de convergence pour certains tests. Nous avons donc ajouté un critère d'arrêt artificiel. L'algorithme s'arrête s'il n'a pas déjà atteint l'optimum, après 15 parcours des origines-destinations.

Ce problème de convergence que nous avons rencontré fait ressortir la faiblesse du prolongement de la fonction de passagers escédentaires défini à la section 4.3.4. La convergence du modèle pourrait être grandement améliorée en utilisant une forme plus complexe pour le prolongement de cette fonction.

TABLEAU 5

EFFET DU PARAMETRE M

TESTS FAITS EN FIXANT LES PARAMETRES β_1=1.0, β_2=1.0, β_3=2.0, α=5.0				
M	Erreur moyenne pour chaque ensemble d'arcs			Moyenne pour tous les arcs de la valeur absolue de l'erreur
	Peu occupés	Moyennement occupés	Très occupés	
1	-7.1	0	14.0	11.8 algorithme a été arrêté après 15 parcours
10	-6.9	0	12.9	11.6 optimum atteint après 14 parcours
100	-6.8	0.1	12.9	11.6 optimum atteint après 14 parcours

Le modèle d'attraction présenté à la section 3.3 et utilisé dans les équations du modèle M2 comporte aussi quatre paramètres à calibrer: β_1, β_2, β_3 et α. Le tableau 6 présente les résultats du modèle obtenus en faisant varier β_3 par rapport à β_1 et β_2. Les valeurs des paramètres minimisant la moyenne des erreurs absolues sont β_1=1.0, β_2=1.0 et β_3=2.0.

TABLEAU 6

EFFET DES PARAMETRES β_1, β_2 et β_3

TESTS FAITS EN FIXANT LES PARAMETRES M = 10, α = 5.0							
β_1	β_2	β_3	$\frac{\beta_1}{\beta_3} = \frac{\beta_2}{\beta_3}$	Erreur moyenne pour chaque ensemble d'arcs			Moyenne pour tous les arcs de la valeur absolue de l'erreur
				Peu occupés	Moyennement occupés	Très occupés	
2.0	2.0	1.0	2	-6.7	1.7	15.8	14.3
1.5	1.5	1.0	3/2	-6.6	1.3	15.2	13.9
1.0	1.0	1.0	1	-6.7	1.1	14.1	13.0
2.0	2.0	2.5	4/5	-6.5	0.6	13.5	12.5
2.0	2.0	3.0	2/3	-6.7	0.3	13.4	12.1
1.5	1.5	2.5	3/5	-6.8	0.1	13.3	11.9
1.0	1.0	2.0	1/2	-6.9	0.0	12.9	11.6
1.0	1.0	3.0	1/3	-6.1	0.6	12.5	11.7

Le tableau 7 présente les résultats du modèle pour différentes valeurs de α. Parmi les valeurs de α qui minimisent la valeur de l'erreur, nous avons choisi la valeur $\alpha = 5.0$, car elle minimise aussi l'erreur au niveau des trois sous-ensembles d'arcs.

TABLEAU 7

EFFET DU PARAMETRE ALPHA

TESTS FAITS EN FIXANT M=10, β_1=1.0, β_2=1.0, β_3=2.0				
α	Erreur moyenne pour chaque ensemble d'arcs			Moyenne pour tous les arcs de la valeur absolue de l'erreur
	Peu occupé	Moyennement occupé	Très occupé	
1.0	-5.4	3.0	14.3	14.4
2.0	-5.6	2.3	12.8	13.0
3.0	-6.0	1.7	12.0	12.4
4.0	-6.2	0.5	12.6	11.9
5.0	-6.9	0.0	12.9	11.6
6.0	-7.2	-0.6	13.4	11.6
7.0	-7.7	-0.7	13.9	11.6
8.0	-8.2	-0.9	14.4	11.7
9.0	-8.6	-1.1	14.6	11.9
10.0	-9.0	-1.3	14.7	12.0

8.4 Résultats du modèle M2

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus du modèle M2 en fixant les paramètres β_1=1.0, β_2=1.0, β_3=2.0, α =5.0 et M =10. Les tableaux 8 et 9 donnent la distribution des erreurs relatives au flot sur les arcs pour différents sous-groupes d'arcs.

Comme le montre le tableau 8, le modèle produit une erreur moyenne de 12.9 pour les arcs très occupés, ce qui est relativement élevé. L'importance de cette erreur vient probablement de l'hypothèse oubliante utilisée pour établir les équations du modèle (chapitre 6). Avec cette hypothèse, les passagers refusés faute de place sont redistribués entre les routes essayées ou non. Sur les routes très occupées, un grand nombre de passagers sont refusés faute de place et sont possiblement réassignés sur la même route. Ainsi, avec l'hypothèse oubliante, on ne respecte pas suffisamment la contrainte de limite de capacité sur les arcs et on surcharge les arcs très occupés. Cette faiblesse du modèle pourrait être facilement corrigée en ajoutant un terme de correction dans le modèle au niveau de l'évaluation du nombre de passagers excédentaires sur les routes.

Le tableau 9 montre des erreurs élevées pour les avions à grande capacité,comme dans le modèle M1. Les remarques faites à ce sujet dans le contexte du modèle M1 s'appliquent ici de façon similaire.

TABLEAU 8

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS POUR LES SOUS-ENSEMBLES D'ARCS OBTENUS EN DIVISANT SUIVANT LES CRITERES D'OCCUPATION ET LONGUEUR DES ARCS

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS

ENSEMBLE DES ARCS PEU OCCUPES

	-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
	0	0	1	1	0	2	0	3	6	14	26	59	14	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 129 MOYENNE -6 9 ECART-TYPE 16 8 ECART ABSOLU 10 9 SIGMA -2 61 SIGMA ABS 4 54

ENSEMBLE DES ARCS MOYENNEMENT OCCUPES

	-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
	0	0	0	0	0	0	1	6	8	25	61	89	69	32	7	0	3	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 300 MOYENNE 0 ECART-TYPE 14 5 ECART ABSOLU 11 1 SIGMA 45 SIGMA ABS 4 18

ENSEMBLE DES ARCS TRES OCCUPPES

	-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	14	47	28	12	3	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 110 MOYENNE 12 9 ECART-TYPE 10 6 ECART ABSOLU 14 0 SIGMA 4 12 SIGMA ABS 4 49

ENSEMBLE DES ARCS COURTS

	-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
	0	0	1	1	0	2	1	6	8	29	69	122	110	48	14	2	2	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 415 MOYENNE 1 4 ECART-TYPE 15 9 ECART ABSOLU 11 5 SIGMA 58 SIGMA ABS 4 31

ENSEMBLE DES ARCS DE LONGUEUR MOYENNE

	-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
	0	0	0	0	0	0	0	1	3	8	16	22	15	12	3	0	1	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS 81 MOYENNE 8 ECART-TYPE 15 2 ECART ABSOLU 12 0 SIGMA 29 SIGMA ABS 4 52

ENSEMBLE DES ARCS LONGS

	-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2	8	17	5	2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 43 MOYENNE -1 9 ECART-TYPE 16 9 ECART ABSOLU 11 9 SIGMA - 31 SIGMA ABS 4 13

ENSEMBLE DES ARCS AU COMPLET

	-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
	0	0	1	1	0	2	1	9	14	37	93	161	130	62	20	3	3	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 539 MOYENNE 1 0 ECART-TYPE 15 9 ECART ABSOLU 11 6 SIGMA 47 SIGMA ABS 4 33

TABLEAU 9

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS POUR LES SOUS-ENSEMBLES D'ARCS OBTENUS EN DIVISANT SUIVANT LE TYPE D'AVION

DISTRIBUTION DES ERREURS RELATIVES AU FLOT DES ARCS

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU DC9

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	13	17	34	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 76 MOYENNE: 3.0 ECART-TYPE: 10.7 ECART ABSOLU 9.2 SIGMA 1.07 SIGMA ABS 3.31

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU D9SF

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	3	5	18	51	84	75	42	8	1	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 289 MOYENNE: 2.5 ECART-TYPE: 13.1 ECART ABSOLU 10.5 SIGMA .95 SIGMA ABS 3.93

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU A727

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	1	1	5	7	21	2	6	3	1	2	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 49 MOYENNE: 2.9 ECART-TYPE: 18.2 ECART ABSOLU 13.0 SIGMA: 1.35 SIGMA ABS

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU DC8F

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	+INF
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 7 MOYENNE: -4.4 ECART-TYPE: 15.9 ECART ABSOLU 9.5 SIGMA -1.54 SIGMA ABS: 4.71

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU R727

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	1	1	0	0	0	2	2	4	5	0	3	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 25 MOYENNE: -9.1 ECART-TYPE: 30.6 ECART ABSOLU 25.2 SIGMA: -1.80 SIGMA ABS 6.54

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU B747

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 6 MOYENNE: -2.6 ECART-TYPE: 8.3 ECART ABSOLU 7.2 SIGMA: -1.12 SIGMA ABS 2.13

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU D88F

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	2	0	0	0	1	1	4	4	4	25	6	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 91 MOYENNE: -1.3 ECART-TYPE: 17.8 ECART ABSOLU 11.4 SIGMA -1.14 SIGMA ABS 5.40

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU LD10

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	1	0	0	2	1	6	6	6	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS: 28 MOYENNE - 9 ECART-TYPE: 19.2 ECART ABSOLU 14.6 SIGMA .05 SIGMA ABS 6.29

ENSEMBLE DES ARCS CORRESPONDANT AU A747

-INF	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	+INF
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

NBE D ARCS 8 MOYENNE -20.6 ECART TYPE 21.9 ECART ABSOLU 20.0 SIGMA -6.64 SIGMA ABS 6.75

Comme nous avons dû ajouter un critère d'arrêt artificiel pour la résolution du modèle M2, nous avons effectué des tests en arrêtant l'algorithme à différents moments. Le tableau 10 présente les résultats obtenus de ces tests et donne les temps de calcul exigés dans chacun des cas. Comme le montre ce tableau, après quelques parcours des origines-destinations, on se trouve déjà au voisinage de la solution optimale. En effet, après 6 parcours, les erreurs obtenues demeurent constantes. A partir de ce moment, il n'y a que de petites quantités de flots (moins de 1 passager) qui sont transférées d'un arc à un autre. Ainsi, nous pouvons considérer que le modèle M2 exige un temps de calcul d'environ 40 sec. pour atteindre la solution optimale.

TABLEAU 10

RESULTATS OBTENUS DU MODELE M2 EN ARRETANT L'ALGORITHME A DIFFERENTS MOMENTS

TESTS FAITS EN FIXANT LES PARAMETRES M =10, β_1=1.0, β_2=1.0, β_3=2.0, α =5.0					
Nombre de parcours après lequel nous avons arrêté l'algorithme	Erreur moyenne pour chaque ensemble d'arc			Moyenne pour tous les arc de la valeur absolue de l'erreur	Temps de calcul
	Peu occupé	Moyennement occupé	Très occupé		
3	-7.0	0.0	13.1	11.7	25.1
4	-6.8	-0.1	13.2	11.6	30.7
5	-6.0	0.0	12.9	11.6	34.6
6	-6.9	0.1	12.9	11.6	38.4
7	-6.9	0.1	12.9	11.6	41.7
8	-6.9	0.1	12.9	11.6	44.1
10	-6.9	0.1	12.9	11.6	50.0
12	-6.9	0.1	12.9	11.6	55.0
14	-6.9	0.1	12.9	11.6	61.2

Les figures 20 et 21 donnent une bonne idée de la qualité des résultats obtenus avec le modèle M2. La figure 20 donne la distribution de l'erreur pour l'ensemble total des arcs et le graphique de la figure 21 représente les flots sur les arcs calculés par le modèle M2 en fonction des flots observés. Les points sont relativement concentrés le long de la diagonale, ce qui démontre la qualité des résultats.

FIGURE 20

DISTRIBUTION DE LA DIFFERENCE ENTRE LE NOMBRE DE PASSAGERS CALCULES PAR LE MODELE M2 ET LE NOMBRE DE PASSAGERS OBSERVES, AU NIVEAU DES ARCS

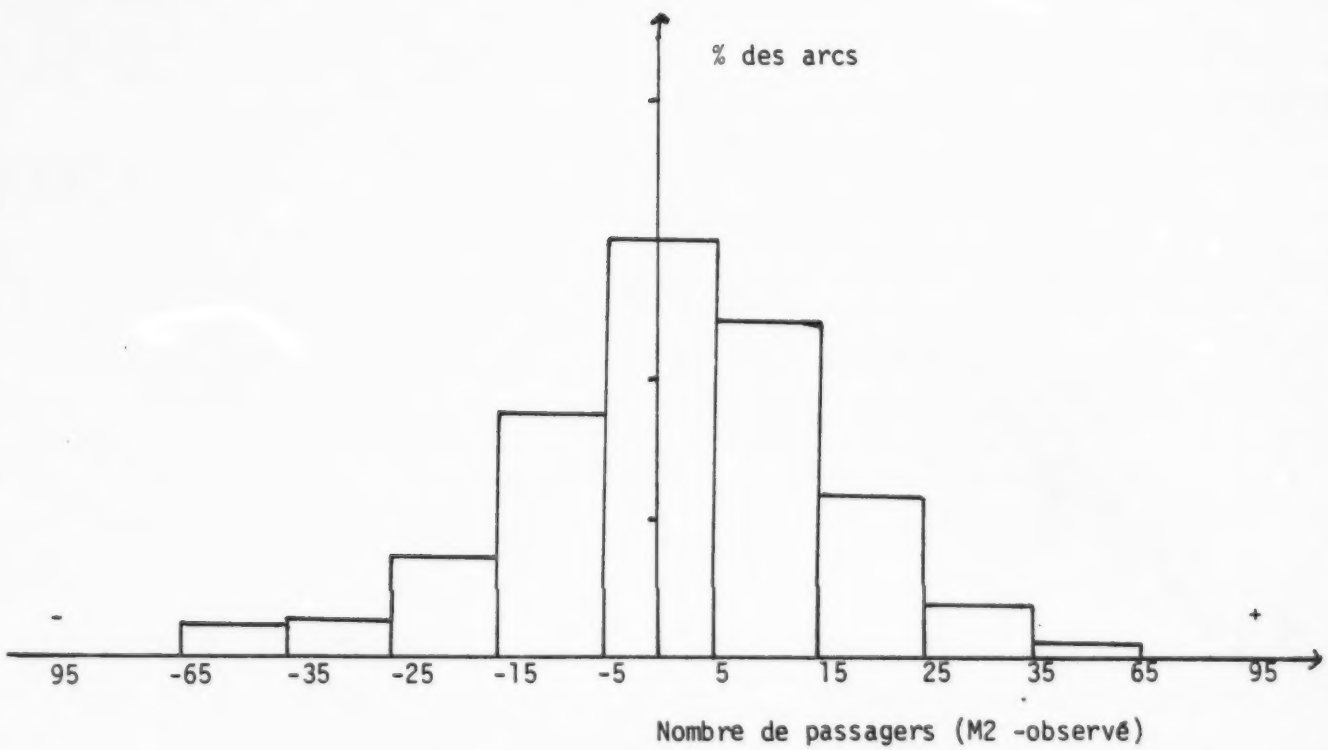
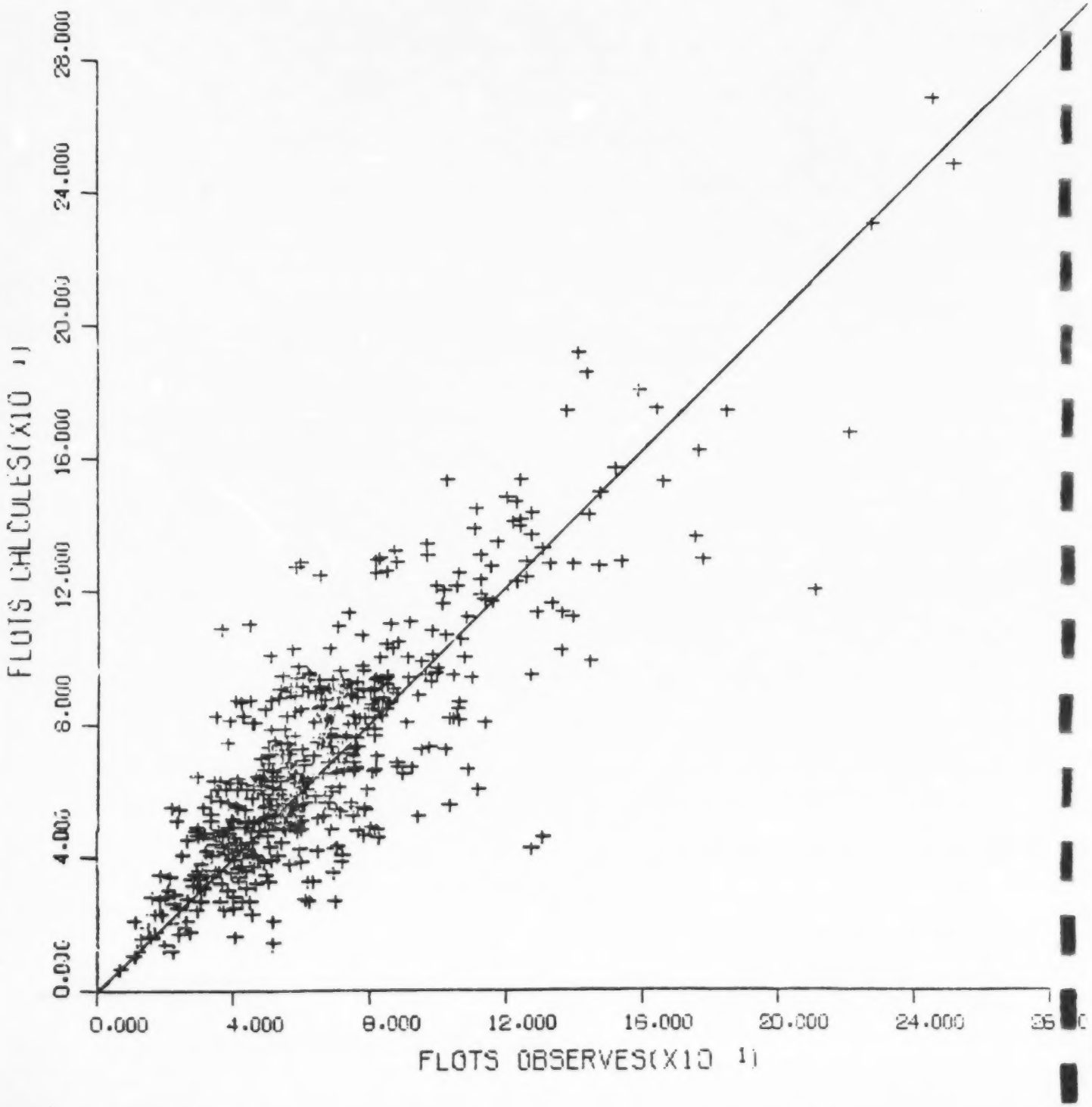


FIGURE 21

NOMBRE DE PASSAGERS SUR UN ARC CALCULE PAR LE MODELE M2 EN FONCTION DU NOMBRE DE PASSAGERS OBSERVES



8.5 CONCLUSION

Le présent travail présente une analyse détaillée de deux modèles d'assignation des passagers déjà introduits dans [7] par François Soumis. Le premier modèle s'inscrit dans la classe des modèles de programmation non-linéaire. Le deuxième modèle correspond à un système d'équations non-linéaires. Comme ce dernier modèle a été défini à partir d'hypothèses de comportement des passagers, il est plus près de la réalité et supérieur théoriquement.

Bien que les deux modèles soient de nature différente, nous avons employé un algorithme similaire pour les résoudre, ceci nous permettant de comparer plus facilement leurs qualités. La méthode de résolution que nous avons utilisée est une méthode de décomposition. Les sous-problèmes ont été résolus par un algorithme de direction réalisable.

Au point de vue théorique, l'étude effectuée a permis d'une part, d'apporter des précisions concernant la définition des variables et la notion de passagers excédentaires dans les contextes différents des deux modèles et, d'autre part, de comprendre mieux le comportement des modèles en ajoutant de nouveaux résultats théoriques. La revue de littérature et l'étude détaillée d'un modèle d'attraction a permis de faire ressortir les facteurs les plus importants pour un passager lors de son choix de route et d'identifier plus facilement

les erreurs introduites dans les modèles M1 et M2 en utilisant un modèle d'attraction trop simpliste.

Au point de vue pratique, l'expérimentation des modèles nous a permis de vérifier la bonne qualité des modèles et leur stabilité par rapport aux variations des paramètres. Les résultats du modèle M2 sont particulièrement intéressants,car un tel modèle d'équilibre n'avait jamais été expérimenté auparavant dans le contexte du transport aérien.

Les modèles ont été expérimentés sur le réseau complet d'Air Canada pour la saison d'hiver 1976. L'analyse des résultats a été faite en comparant les flots calculés par le modèle et les flots observés, au niveau des arcs. La moyenne de la valeur absolue de l'erreur d'estimation par arc est de 8.4 passagers dans le cas du modèle M1 et de 11.6 passagers dans le cas du modèle M2. Ces erreurs sont du même ordre de grandeur et montrent la qualité des estimations obtenues des deux modèles. La faiblesse des résultats du modèle M2 par rapport à ceux du modèle M1 provient de la plus grande sensibilité du modèle M2 au modèle d'attraction utilisé et ce, à cause des hypothèses de comportement des passagers sous-jacentes au modèle. Le modèle M1 amène les passagers à utiliser la route la plus attrayante, tandis que le modèle M2 distribue les passagers en proportion des coefficients d'attraction. La précision du modèle d'attraction influence donc davantage les résultats du modèle M2.

En développant un modèle d'attraction moins simpliste, l'erreur serait fortement diminuée, en particulier dans le cas du modèle M2. Le nouveau modèle d'attraction devrait tenir compte d'un plus grand nombre de facteurs tel le type d'avion, la priorité de la compagnie pour certains services, le type de passagers utilisant les différentes routes (tourisme ou voyage d'affaire)...

Comme un grand nombre de modèles d'attraction existent sur le marché, cette faiblesse des modèles M1 et M2 pourrait être facilement corrigée en utilisant un des modèles déjà disponible. La majorité des études existantes sur l'estimation de la distribution des passagers évaluent assez bien la composante d'attraction, mais font une pauvre approximation de la contrainte de limite de capacité des avions. Par contre, sur ce dernier aspect, les modèles M1 et M2 sont très forts. En traitant la demande de façon stochastique et en utilisant la notion de passagers excédentaires, les modèles M1 et M2 modélisent la contrainte de limite de capacité des avions de façon très précise.

Finalement, il est bon de noter que les modèles M1 et M2 exigent de faibles temps de calcul. En effet, les temps exigés pour atteindre la solution optimale sont de 20.8 sec. dans le cas du modèle M1 et de 38.4 sec. dans le cas du modèle M2 et, sont donc du même ordre de grandeur. Le temps de calcul demandé par le modèle M2 est un peu plus élevé, mais il pourrait être réduit en modifiant l'approximation de la fonction de passagers excédentaires. Le prolongement que

nous avons défini pour nous permettre d'évaluer la fonction pour des assignations des passagers dépassant la limite de capacité sur certains arcs est un peu simpliste et crée des problèmes de convergence. Une étude du comportement de la fonction pour des valeurs du flot, au voisinage de la limite de capacité, pourrait aider à définir une nouvelle équation pour le prolongement de cette fonction.

Avec un temps de résolution aussi court, ces modèles d'assignation des passagers pourront être intégrés dans un processus HOMME-MACHINE pour évaluer la meilleure offre de transport. En effet, en modifiant séquentiellement les variables de décision et en utilisant de façon intéractive un de ces modèles, les planificateurs pourront mesurer l'impact de différents projets et évaluer l'offre de transport donnant le meilleur service au plus bas coût. Les résultats obtenus de l'expérimentation des modèles M1 et M2 représente donc un gain important du côté de la planification en transport aérien.

ANNEXE 1

PREUVE DES LEMMES 1, 2 ET 3 UTILISES A LA SECTION 7.4

Les lemmes 1, 2 et 3 énoncés ici sont utilisés à la section 7.4 dans la preuve de convergence du théorème 1. Les démonstrations de ces lemmes ont été tirées de [7]. Les notations utilisées sont les mêmes qu'au chapitre 7 sauf pour la direction du second ordre. En effet, celle-ci était notée y^k au chapitre 7 et elle est notée d^k dans les preuves qui suivent.

Lemme 1 $d_q^k \leq 0$ implique $C_q(h_q^{k+1}) \geq \bar{C}^k$.

Preuve. Rappelons que $h_q^{k+1} = h_q^k + \sigma^k d_q^k$ avec $0 < \sigma^k \leq 1$.

Considérons d'abord le cas où $d_q^k < 0$.

Par le théorème de Taylor

$$C_q(h_q^{k+1}) = C_q(h_q^k) + \sigma^k d_q^k S_q(h_q^k) + (\sigma^k d_q^k)^2 T_q(\xi)$$

pour $h_q^k \leq \xi \leq h_q^{k+1}$.

Alors $C_q(h_q^{k+1}) \geq C_q(h_q^k) + \sigma^k d_q^k S_q(h_q^k)$, car $T_q(\xi) > 0$

$$\geq C_q(h_q^k) + d_q^k S_q(h_q^k), \quad \text{car } \sigma^k \leq 1$$

$$\geq C_q(h_q^k) + \bar{C}^k - C_q(h_q^k) \quad \text{par la définition de } d_q^k \qquad (7.10)$$

Donc $C_q(h_q^{k+1}) \geq \bar{C}^k$.

Dans le cas où $d_q^k = 0$, $C_q(h_q^{k+1}) = C_q(h_q^k)$

et $\bar{C}^k - C_q(h_q^k) \leq 0$ par ( ) .

Donc on a aussi $C_q(h_q^{k+1}) \geq \bar{C}^k$.

Lemme 2 Si $\bar{C}^k > C_q(0)$, alors $h_q^{k+1} > 0$.

Preuve. $h_q^{k+1} = h_q^k + \sigma^k d_q^k$ avec $h_q^k \geq 0$ et $0 < \sigma \leq 1$.

Si $d_q^k > 0$ alors nécessairement $h_q^{k+1} > 0$.

Si $d_q^k \leq 0$, alors $C_q(h_q^{k+1}) \geq \bar{C}^k$ par le lemme 1, et

ainsi $C_q(h_q^{k+1}) > C_q(0)$ puisque par hypothèse $\bar{C}^k > C_q(0)$.

Donc $h_q^{k+1} > 0$ car $C_q(\ )$ est une fonction croissante $\left(\frac{\partial C_q(\ )}{\partial h_q} > 0\right)$.

Lemme 3. Si les variables positives avant l'itération k demeurent positives à la fin de l'itération k (i.e. si $h_q^k > 0$ implique $h_q^{k+1} > 0$) alors $\bar{C}^{k+1} \geq \bar{C}^k$.

Preuve. Rappelons que $P_k = \{ q \mid h_q^k > 0\} \cup \{q \mid h_q^k = 0 \text{ et } C_q(h_q^k) < \bar{C}^k\}$

est l'ensemble des indices des variables qui peuvent être modifiées durant l'itération k .

Par définition de d, si

$$h_q^k = 0 \quad \text{et} \quad C_q(h_q^k) < \bar{C}^k, \quad \text{alors} \quad d_q^k = \frac{\bar{C}_q - C_q(h_q^k)}{S_q(h_q^k)} > 0$$

et ainsi $h_q^{k+1} = h_q^k + \sigma^k d_q^k > 0$.

En utilisant l'hypothèse du lemme

$$P_k = \{q \mid h_q^k > 0\} \cup \{q \mid h_q^k = 0 \text{ et } C_q(h_q^k) < \bar{C}\} = \{q \mid h_q^{k+1} > 0\} \subseteq P_{k+1} .$$

Définissons:

$$\pi = \sum_{q\in P_k} \frac{C_q(h_q^{k+1})}{S_q(h_q^{k+1})} \Big/ \sum_{q\in P_k} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})} \text{ et montrons que } \pi - \bar{C}^k \geq 0. \text{ Or}$$

$$\pi - \bar{C}^k = \sum_{q\in P_k} \frac{C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^{k+1})} \Big/ \sum_{q\in P_k} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}$$

et puisque le dénominateur est positif il suffit de montrer que le numérateur est aussi positif.

Partitionnons $P_k = J_1 \cup J_2 \cup J_3$

où $J_1 = \{p \in P_k \mid C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k < 0\}$

$J_2 = \{p \in P_k \mid C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k \geq 0 \text{ et } d_q^k < 0\}$

$J_3 = \{p \in P_k \mid C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k \geq 0 \text{ et } d_q^k \geq 0\}$.

Si $q \in J_1$, alors $C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k < 0$ et la contraposé du lemme 1 implique $d_q^k > 0$.

Ainsi $h_q^{k+1} = h_q^k + \sigma^k d_q^k > h_q^k$, et alors $S_q(h_q^{k+1}) > S_q(h_q^k)$ puisque $S_q(\ )$ est une fonction croissante.

Donc $$\sum_{q\in J_1} \frac{C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^{k+1})} \geq \sum_{q\in J_1} \frac{C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^k)} \quad . \qquad (1)$$

Si $q \in J_2$, alors $d_q^k < 0$ ce qui implique $h_q^{k+1} = h_q^k + \sigma^k h_q^k < h_q^k$, et par conséquent $S_q(h_q^{k+1}) < S_q(h_q^k)$ puisque $S_q(\ )$ est une fonction croissante.

$$\text{Donc} \quad \sum_{q \in J_2} \frac{C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^{k+1})} \geq \sum_{q \in J_2} \frac{C_q(h^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^k)} \quad . \tag{2}$$

Si $q \in J_1 \cup J_2$, alors $d_q^k \neq 0$.

Par le théorème de Taylor

$$C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k = C_q(h_q^k + \sigma^k d_q^k) - \bar{C}^k$$

$$= C_q(h_q^k) + \sigma^k d_q^k \ S_q(h_q^k) + (\sigma^k d_q^k)^2 \ T_q(\xi) - \bar{C}^k$$

$$\geq C_q(h_q^k) + \sigma^k d_q^k \ S_q(h_q^k) - \bar{C}^k \quad \text{car} \quad T_q(\xi) > 0$$

$$\geq (\sigma^k - 1) \, d_q^k \ S_q(h_q^k) \quad \text{par le cas} \quad d_q^k \neq 0 \quad \text{de (7.10)} \ .$$

En subtituant cette dernière relation dans (1) et (2), nous obtenons

$$\sum_{q \in J_1 \cup J_2} \frac{C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^{k+1})} \geq (\sigma^k - 1) \sum_{q \in J_1 \cup J_2} d_q^k \ .$$

Si $q \in J_3$, alors $C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k \geq 0$ et $d_q^k \geq 0$ et ainsi

$$\sum_{q \in J_3} \frac{C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^{k+1})} \geq 0 \geq (\sigma^k - 1) \sum_{q \in J_3} d_q^k \quad \text{car} \quad \sigma^k \leq 1 \ .$$

En regroupant ces deux dernières relations, on obtient

$$\sum_{q\in P_k} \frac{C_q(h_q^{k+1}) - \bar{C}^k}{S_q(h_q^{k+1})} \geq (\sigma^k - 1) \sum_{q\in P_k} d_q^k = 0$$

et ainsi $\pi - \bar{C}^k \geq 0$.

Utilisons maintenant ce résultat pour montrer que $\bar{C}^{k+1} - \bar{C}^k \geq 0$.
Avant d'évaluer $\bar{C}^{k+1}$, rappelons que si $q \in P_{k+1} - P_k$ alors $h_q^{k+1} = 0$
et ainsi $C_q(0) \geq \bar{C}^k$ par le lemme 2.

$$\bar{C}^{k+1} = \frac{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{C_q(h_q^{k+1})}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} = \frac{\sum_{q\in P_{k+1}-P_k} \frac{C_q(0)}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} + \frac{\sum_{q\in P_k} \frac{C_q(h_q^{k+1})}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} .$$

$$\bar{C}^{k+1} \geq \frac{\sum_{q\in P_{k+1}-P_k} \frac{\bar{C}^k}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} + \frac{\sum_{q\in P_k} \frac{C_q(h_q^{k+1})}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_k} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} \cdot \frac{\sum_{q\in P_k} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} .$$

$$\bar{C}^{k+1} \geq \bar{C}^k \frac{\sum_{q\in P_{k+1}-P_k} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} + \pi \frac{\sum_{q\in P_k} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}}{\sum_{q\in P_{k+1}} \frac{1}{S_q(h_q^{k+1})}} .$$

D'où $\bar{C}^{k+1} \geq \bar{C}^k$ puisque $\pi \geq \bar{C}^k$.

Ceci complète la preuve du lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AURIGNAC, A. et BENATTAR, M., Modèle d'affectation de la demande journalière dans une grille de trains, Les cahiers scientifiques de la revue Transports, No 5, 2e semestre 1981.

[2] DETZEL, Edward G. Jr. A Simulation of Airline Market Shares as a Function of Scheduling. Thesis submitted to Graduate School, Evanston, Illinois, U.S.A., Juin 1971.

[3] ERIKSEN, Steven E. et TANEJA, Nawal K., Evaluation of Schedule Air Passenger Service in Domestic Markets, Journal of Aircraft, Vol. 17, No. 1, Janvier 1980.

[4] GAGNON, Gilles, A Model for Flowing Passengers over Airlines Networks, Proceedings of the Seventh AGIFORS Symposium, octobre 1967.

[5] PASLOC development, Project 118, Operational Research Department, Air Canada.

[6] SHAW, Gordon C., The Schedule - Its effect on Passenger Volumes, Proceedings of the Eight AGIFORS Symposium, 1968.

[7] SOUMIS, François, Planification d'une flotte d'avions, Publication #318, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, décembre 1978.

[8] SOUMIS, F., FERLAND, J.-A., ROUSSEAU, J.-M., MAPUM - A Model for Assigning Passengers to a Flight Schedule, Transportation Research A, Vol. 15A, p. 155-162, 1981.

[9] SOUMIS, F., FERLAND, J.-A., ROUSSEAU, J.-M., A Model for Large Scale Aircraft Routing Problems, Transportation Research B, Vol. 14B, No 1/2, p. 191-201, 1980.

[10] SOUMIS, F., Modèle de comportement des clients du transport aérien, Comparison of Automatic Control and Operational Research Techniques applied to a Large System Analysis and Control, Symposium IFAC/ INFOR, Toulouse, p. 165-173, Pergamon Press, 1979.

[11] Airline Schedule Planning and Evaluation Model - User's Guide. Report No C1-806-2879R, Commercial Operations Research, Douglas Aircraft, octobre 1975.

[12] Market Share: A Method for Estimating the Future of Consequences of Airline Competitive Strategy Options. Sales Technology, Boeing Commercial Airplane Company, Seattle, Washington, U.S.A., octobre 1976.

[13] WONG, Y. and BIRCH, W., Boeing Aircraft Selective and Evaluation System. User'r Guide, Boeing Company, décembre 1978.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mes deux directeurs de maîtrise Messieurs Jacques Ferland et François Soumis pour leur disponibilité et l'aide apportée durant la rédaction de ce mémoire. Je voudrais remercier, plus particulièrement, Monsieur François Soumis pour son appui moral.

Je remercie aussi Monsieur Réjean Lessard pour sa collaboration quant à l'aide technique, du côté informatique, fournie durant la préparation du mémoire.

J'adresse également mes remerciements à Mademoiselle Louise Hébert, pour les nombreuses heures passées à la frappe de ce mémoire, ainsi qu'à Mademoiselle Carole Lavoie qui m'a été d'une grande aide lors de la révision des textes.

Il est important de souligner que des fonds,du programme universitaire en "Transport",alloués par le Gouvernement Fédéral, ont permis l'élaboration de ce projet.